

IL NUOVO CIMENTO

ORGANO DELLA SOCIETÀ ITALIANA DI FISICA

SOTTO GLI AUSPICI DEL CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE

VOL. X, N. 12

Serie nona

1° Dicembre 1953

D, D Neutron Scattering and Polarization Effects in C^{12} .

R. RICAMO

Swiss Federal Institute of Technology - Zürich (Switzerland)

(ricevuto l'8 Luglio 1953)

Summary. — *D, D* neutron polarization has been established again by measuring the azimuthal dependence of the differential cross-section of C^{12} . Experiments allow assignment of a lower limit 20% for the polarization of 3,32 MeV neutrons, emitted at 45° from the deuteron direction for a deuteron energy of 610 keV. Measurements of the angular distribution of scattered neutrons at resonance energy $E_n = 2,08$ MeV permit to identify the level as a *D* state ($J = 3/2$ or $5/2$). At the energy $E_n = 2,20$ MeV, i. e. far from resonances, the angular distribution has the expected theoretical behaviour for the potential scattering. The effect of polarized neutrons on the angular distribution near an isolated level of the $D_{3/2}$ type has been calculated.

1. — Introduction.

Recently it has been experimentally established that neutrons emitted in the $D(d, n)He^3$ reaction are polarized ^(1a), ^(1b), as theoretically predicted and discussed by different authors ⁽²⁾⁽⁴⁾. The polarization of protons emitted in the competing reaction $D(d, p)T$ was measured by BISHOP *et al.* ⁽⁵⁾.

This work was undertaken with the purpose of studying polarization effects in the neighbourhood of an isolated resonance level. The azimuthal dependence of the differential cross-section in this case may give the magnitude of the

^(1a) R. RICAMO: *Helv. Phys. Acta*, **26**, 423 (1953).

^(1b) P. HUBER, E. BAUMGARTNER: *Helv. Phys. Acta*, **26**, 420 (1953).

⁽²⁾ L. WOLFENSTEIN: *Phys. Rev.*, **75**, 1664 (1949).

⁽³⁾ R. J. BLIN-STOYLE: *Proc. Phys. Soc.*, **64**, 700 (1951) and **65**, 949 (1952).

⁽⁴⁾ M. CINI: *Nuovo Cimento*, **8**, 1007 (1951).

⁽⁵⁾ G. R. BISHOP, G. PRESTON, J. M. WESTHEAD, H. H. HALBAN: *Nature*, **170**, 113 (1952).

polarization of incident neutrons as one may use the Breit-Wigner scattering phases for the theoretical evaluations ⁽⁶⁾ ⁽⁷⁾.

Because of the smallness of the effect, however, it is necessary to work with a neutron beam forming an angle α of about 45° or 135° in c.m.s. with the direction of the incident deuterons, since for these angles it is expected that the neutron-polarization P reaches its maximum value.

The resonance level at $E_n = 2,08$ MeV of C^{12} (Fig. 11) fulfills the above requirements, but unfortunately as its width is $\Gamma \leq 10$ keV no measurement of polarization effect is possible using D, D neutrons, whose spectral width is in every case several times 10 keV. At this energy we therefore limited ourselves to the measurement of the mean differential cross-section and established that the resonance corresponds to a D level.

2. - Experimental method.

We use a voltage of 610 keV ⁽⁸⁾ to accelerate a 15 μA current of deuterons against a heavy ice target whose thickness corresponds to 0,25 of the saturation value. The neutrons are detected with anthracene scintillation counters previously described ⁽⁹⁾.

The neutron source is completely surrounded by blocks of paraffin mixed with 15% H_3BO_3 which forms a cube of about 75 cm a side. It is possible to rotate in a vertical plane about the neutron source a portion of the paraffin screening provided with a channel of 2,4 cm diameter ⁽¹⁰⁾. The scatterer consists of a graphite cylinder of the same diameter placed at 15 cm from the end of the 60 cm long channel and can be in a very reproducible way placed or removed from the neutron beam that emerges from the channel.

For each angle β of detection, measurements with and without scatterer are repeated 10 times. About 10^3 counts are registered each time and this takes about a minute; one has therefore 10^4 counts for each β . If 20% of the counts are due to neutrons scattered from graphite, this gives a statistical error of 2,2%. Of course these are mean values as the counting rates depend upon the angles α and β of Fig. 8.

The most important fluctuations of measurements arise from the variation of the background. For $\alpha = 45^\circ$ the background is 3% of the direct beam, but rises to 8% for $\alpha = 130^\circ$.

⁽⁶⁾ J. V. LEPORE: *Phys. Rev.*, **79**, 137 (1950).

⁽⁷⁾ M. VERDE: *Nuovo Cimento*, **8**, 376 (1952).

⁽⁸⁾ E. BLEULER and W. ZÜNTI: *Helv. Phys. Acta*, **19**, 137 (1946).

⁽⁹⁾ R. RICAMO and W. ZÜNTI: *Helv. Phys. Acta*, **24**, 419 (1951).

⁽¹⁰⁾ R. MEIER and R. RICAMO: *Helv. Phys. Acta*, **26**, 430 (1953).

3. - Theory.

3.1. *Unpolarized beam.* - The differential cross-section $\sigma(\vartheta)$ for an unpolarized neutron-beam may be written according to BLOCH ⁽¹¹⁾

$$(1) \quad k^2\sigma(\vartheta) = \left| \sum_{l \neq L} [(l+1)A_{l+1/2}^{(l)} + lA_{l-1/2}^{(l)}]P_l(\cos \vartheta) + [(L+1)\eta_{L+1/2}^{(L)} + L\eta_{L-1/2}^{(L)}]P_L(\cos \vartheta) \right|^2 + \left| \sum_{l \neq L} [A_{l+1/2}^{(l)} - A_{l-1/2}^{(l)}]P_l^1(\cos \vartheta) + [\eta_{L+1/2}^{(L)} - \eta_{L-1/2}^{(L)}]P_L^1(\cos \vartheta) \right|^2,$$

where we put:

$$(2) \quad A_{l\pm 1/2}^{(l)} = \exp[i\delta_{l\pm 1/2}^{(l)}] \sin \delta_{l\pm 1/2}^{(l)},$$

$$(3) \quad \eta_{L\pm 1/2}^{(L)} = \exp[i\delta_{L\pm 1/2}^{(L)}] \sin \delta_{L\pm 1/2}^{(L)} + \exp[2i\delta_{L\pm 1/2}^{(L)}] \frac{\Gamma_{L\pm 1/2}^{(L)}/2}{E_{L\pm 1/2}^{(L)} - E_n - i\Gamma_{L\pm 1/2}^{(L)}/2}.$$

E_n is the neutron energy, $E_{L\pm 1/2}^{(L)}$ the true resonance energy E_r , Γ is the width of the level, $k = 1/\lambda$. The P_l are the Legendre polynomials and P_l^1 the first associated Legendre functions defined as $P_l^1 = dP_l(\cos \vartheta)/d\vartheta$. The terms $A_{l\pm 1/2}^{(l)}$ represent the contribution of the potential scattering alone and $\eta_{L\pm 1/2}^{(L)}$ the total contribution from the potential plus the resonance scattering.

If for simplicity we suppose that the potential scattering is not spin dependent, we have

$$(4) \quad A_{L+1/2}^{(L)} = A_{L-1/2}^{(L)} = A_L.$$

Putting

$$(5) \quad \mu_L = \frac{\Gamma_{L\pm 1/2}^{(L)}/2}{E_{L\pm 1/2}^{(L)} - E_n - i\Gamma_{L\pm 1/2}^{(L)}/2} = \exp[i\psi] \sin \psi$$

and supposing that only one level is effective, we write (1) in the form

$$(6) \quad k^2\sigma(\vartheta) = |\alpha|^2 + |\beta|^2,$$

where

$$(7) \quad \begin{cases} \alpha = \sum_l (2l+1) A_l P_l(\cos \vartheta) + \frac{2J+1}{2} \exp[2i\bar{\delta}_L] \mu_L P_L(\cos \vartheta), \\ \beta = \pm i \exp[2i\bar{\delta}_L] \mu_L P_L^1(\cos \vartheta), \end{cases}$$

⁽¹¹⁾ F. BLOCH: *Phys. Rev.*, **58**, 829 (1940).

$\bar{\delta}$ means the phase due to potential scattering. The total phase δ is

$$(8) \quad \delta = \bar{\delta} + \psi,$$

where

$$(9) \quad \psi = \text{arc cotg} \frac{E_r - E_n}{\Gamma/2} \quad (\text{see (5)}).$$

Equation (6) gives the mean value of the angular distribution averaged on all azimuthal angles, and, of course, this is independent of the polarization state of incoming neutrons.

In Fig. 1 and 2 are given the curves calculated from (6) taking $\bar{\delta}_0 = -90^\circ$, $\bar{\delta}_1 = -14^\circ$, $\bar{\delta}_2 = 0^\circ$ and $\psi = 90^\circ$. It appears there that the angular distributions are very dependent upon the parity of the resonance level.

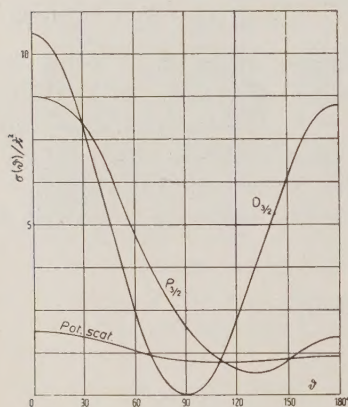


Fig. 1. - Potential scattering alone, resonance levels $P_{3/2}$ and $D_{3/2}$ at resonance.

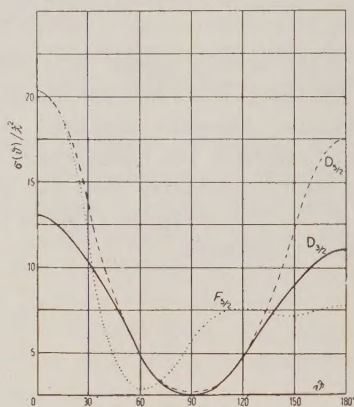


Fig. 2. - $D_{3/2}$; $D_{5/2}$ and $F_{5/2}$ levels at resonance.

Fig. 1. and 2. - Differential cross-section $\sigma(\theta)$ in units of λ^2 for scattering phases $\bar{\delta}_0 = -90^\circ$, $\bar{\delta}_1 = -14^\circ$, $\bar{\delta}_2 = \bar{\delta}_3 = 0^\circ$, $\delta_2^\pm = \psi = \text{arc cotg} (E_r - E_n)/\Gamma/2 = +90^\circ$ for an unpolarized neutron beam.

3.2. *Polarized beam.* - If there are n_+ neutrons with the spin perpendicular to the scattering plane in one direction and n_- antiparallel to these, the relation

$$(10) \quad P = \frac{n_+ - n_-}{n_+ + n_-},$$

gives the magnitude of the polarization vector perpendicular to the scattering plane of the $D(d, n)He^3$ reaction.

The differential cross-section for a polarized neutron beam in function of ϑ and φ is given ⁽⁶⁾ by:

$$(11) \quad k^2 \sigma(\vartheta, \varphi) = k^2 \sigma(\vartheta) + P \sin \varphi [|\alpha + \beta|^2 - (|\alpha|^2 + |\beta|^2)].$$

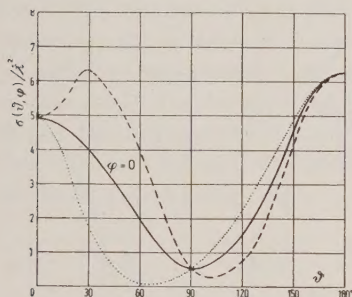


Fig. 3. — $E_n = E_r - \Gamma/2$; $\delta_2^- = \psi = +45^\circ$.

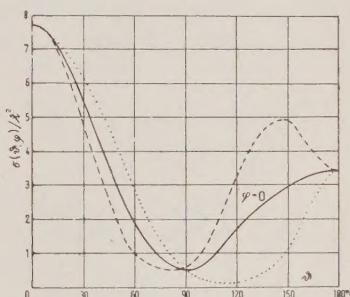


Fig. 4. — $E_n = E_r + \Gamma/2$, $\delta_2^- = \psi = -45^\circ$.

Fig. 3 and 4. — Differential cross-section in units of λ^2 for a polarized neutron beam with 100% polarization; $\delta_0 = -90^\circ$, $\delta_1 = -14^\circ$, $\delta_2 = 0^\circ$; $\varphi = 0^\circ, 90^\circ, 270^\circ$; $L = 2$; $J = L - 1/2 = 3/2$; ... $P \sin \varphi = +1$; --- $P \sin \varphi = -1$;

In Fig. 3 we give the behaviour of (11) for the case of a $D_{3/2}$ level, at neutron energy $E_n = E_r - \Gamma/2$, and $\varphi = 0^\circ, 90^\circ, 270^\circ$. In Fig. 4 we give the analogous curves for $E_n = E_r + \Gamma/2$.

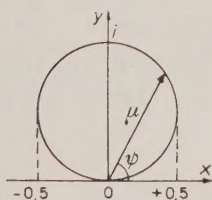


Fig. 5. — Representation of a complex quantity of the type $e^{i\psi} \sin \varphi$ for graphical computation of $\sigma(\vartheta)$ and $\sigma(\vartheta, \varphi)$.

It is interesting to note (see (11)) that there is no polarization effect if: 1) $\alpha = 0$; 2) $\beta = 0$; 3) the phase difference between α and β is equal to $(2n + 1)\pi/2$ with n integer. Case 2) occurs at $\vartheta = 90^\circ$ for isolated levels of even parity (as in the case chosen). In consequence it is not convenient to make measurements of polarization effects at the fixed angle $\vartheta = 90^\circ$ only. We note also that in any case the polarization effect is zero at $\vartheta = 0^\circ, 180^\circ$.

We found it very convenient to make graphical calculations as all terms that enter in (11) are of the type $e^{i\psi} \sin \varphi$ (Fig. 5).

4. - Experimental angular distributions.

4.1. *Potential scattering.* ($E_n = 2,20$ MeV, $\alpha = 120^\circ$). - At this energy, we are nearly three times the width of the neutron spectrum above the

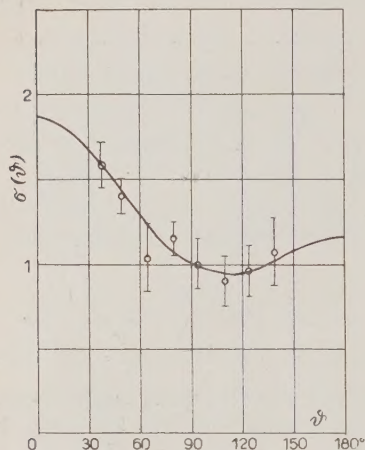


Fig. 6. - Experimental points for $\sigma(\theta)$ at $E_n = 2,20$ MeV, $\alpha = 120^\circ$, and theoretical curve for potential scattering with $\bar{\delta}_0 = -90^\circ$, $\bar{\delta}_1 = -14^\circ$, $\bar{\delta}_2 = 0^\circ$ (arbitrary units).

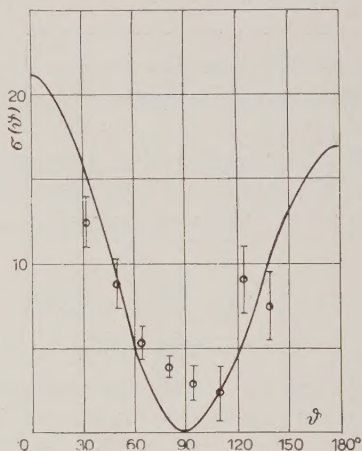


Fig. 7. - Experimental points for $\sigma(\theta)$ at $E_n = E_r = 2,08$ MeV, $\alpha = 130^\circ,5$ and theoretical curve in arbitrary units, supposing a $D_{3/2}$ resonance level; $\bar{\delta}_0 = -90^\circ$, $\bar{\delta}_1 = -14^\circ$, $\bar{\delta}_2 = 0^\circ$, $\delta_2 = \psi = +90^\circ$.

level at 2,08 MeV. The experimental points are given in Fig. 6. The curve is theoretical and corresponds to (6) with $\bar{\delta}_0 = -90^\circ$, $\bar{\delta}_1 = -14^\circ$, $\delta_2 = 0^\circ$. The theoretical cross-section

$$(12) \quad \sigma_{el} = 4\pi\lambda^2 \sum_l (2l+1) \sin^2 \bar{\delta}_l,$$

amounts up to 1,61 barns; its experimental value is 1,65 barns.

The measurements didn't provide information on polarization because the background was very large ($\alpha = 120^\circ$).

4.2. *Resonance level at $E_n = 2,08$ MeV ($\alpha = 130^\circ,5$).* - The experimental point and the theoretical curves are given in Fig. 7. We take here $\delta_0 = -90^\circ$, $\delta_1 = -14^\circ$, $\delta_2 = \psi = 90^\circ$.

The resonance level belongs clearly to a *D* state. It is not possible to decide if the total angular momentum is $J = 3/2$ or $5/2$ ⁽¹²⁾.

The experimental anisotropy is less pronounced than the theoretical one because the level width $\Gamma = 10$ keV, while the spectrum width $\Delta = 30$ keV. For this reason, we did not succeed in detecting a polarization effect here.

4.3. *Azimuthal dependence of the differential cross-section.* ($E_n = 3,32$ MeV, $\alpha = 45^\circ$). — Neutrons of 3,32 MeV are obtained in our experiments with 610 keV deuterons, at an angle $\alpha = 45^\circ$. This is the optimum value required for a polarization experiment. In addition at this angle the background is only 3% of the incident beam and we are then favoured for the measurement of the small polarization effect.

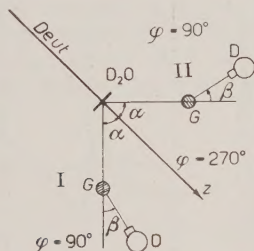


Fig. 8. — Experimental arrangement for $\sigma(\theta, \varphi)$ measurements. D is the detector that receives neutrons scattered from graphite G at an angle β in lab. system (θ in cm.s.). Position I corresponds to the old experiments ^(1a); position II to that of the new ones. Azimuthal angle $\varphi = 270^\circ$ always corresponds to neutron scattered inside the cone with z axis.

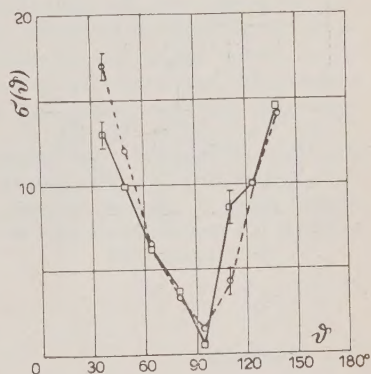


Fig. 9. — Azimuthal dependence of differential cross-section at $E_n = 3,32$ MeV, $\alpha = 45^\circ$. Dotted curve joins experimental points for $\varphi = 90^\circ$, continuous curve that for $\varphi = 270^\circ$. Measurements are done in position II of Fig. 8. Polarisation effect is clearly outside of the experimental errors.

As we didn't succeed in detecting polarization effects in experiments 4.1 and 4.2, we repeated the measurements at $E_n = 3,32$ MeV which were previously described ^(1a). In order to prove that no apparatus asymmetry was responsible for the observed polarization effects, we measured the azimuthal dependence of differential cross-section in a d-n scattering plane rotated by 180° around the direction z of incident deuterons (Fig. 8).

⁽¹²⁾ C. K. BOCKELMANN, D. W. MILLER, R. K. ADAIR and H. H. BARSHALL: *Phys. Rev.*, **84**, 69 (1951).

Experimental results appear in Fig. 9. We see that the intensity of scattered neutrons at $90^\circ < \vartheta < 120^\circ$ is larger at $\varphi = 270^\circ$ than at $\varphi = 90^\circ$. The polarization effect has here the same behaviour as in the first experiment ⁽¹²⁾.

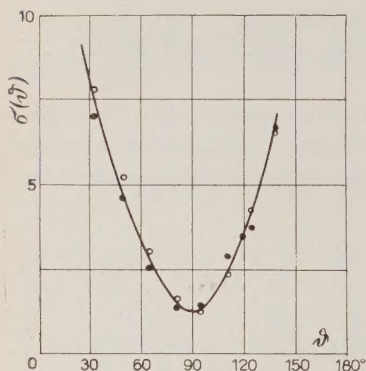


Fig. 10. - Differential cross-section at $E_n = 3.66$ MeV, $\alpha = 0^\circ$. Experimental points: \circ present measurements; \bullet old measurements with the ring method ⁽¹³⁾.

5. - Conclusions.

With our new measurements we are able to confirm the presence of polarization effects with neutrons of the D, D reaction. We can, however, still assign only

a lower limit to the polarization degree, $P \geq 20\%$, since the phases of the partially scattered waves are still unknown for an energy of 3.32 MeV where a polarization effect was successfully stated. The tentative phase analysis of HUBER *et al.* ⁽¹⁴⁾ cannot indeed be safely used at this energy. Another result of this work is the assignment of $l = 2$ to the level at 2.08 MeV.

We wish to thank Prof. P. SCHERRER for his kind and helpful interest and Prof. M. VERDE for his suggestions and encouragement of this work.

⁽¹³⁾ R. RICAMO: *Nuovo Cimento*, **8**, 893 (1951).

⁽¹⁴⁾ P. HUBER, E. BALDINGER and R. BUDDE: *Helv. Phys. Acta*, **25**, 444 (1952).

4.4. *Resonance at $E_n = 3.66$ MeV ($\alpha = 0^\circ$).* - We checked our experimental arrangement by making a measurement of the differential cross-section at $\alpha = 0^\circ$. The experimental points fit very well with the old ones (Fig. 10) obtained by an entirely different geometry ⁽¹³⁾.

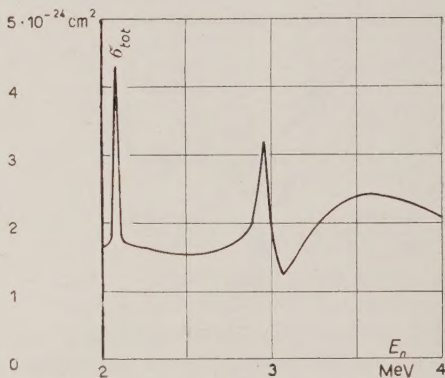


Fig. 11. - Total neutron cross-section of C^{12} from ref. ⁽¹²⁾.

RIASSUNTO

Usando neutroni D, D viene misurata la sezione d'urto differenziale $\sigma(\theta)$ del C¹² per energia dei neutroni $E_n = 2,20$ MeV, cioè lontano da ogni risonanza. L'anisotropia constatata viene interpretata come effetto del contributo di onde di momento orbitale $l = 0$ ed $l = 1$. Niente può essere detto sull'effetto di polarizzazione per il « potential scattering ». Viene misurata la $\sigma(\theta)$ per $E_n = 2,08$ MeV corrispondente ad una risonanza della σ_{tot} nel C¹² (vedi fig. 11) con una larghezza del livello $\Gamma = 10$ keV. I risultati delle misure confrontati con le curve calcolate teoricamente permettono di affermare che il livello è $D_{3/2}$ oppure $D_{5/2}$. Poichè la larghezza dello spettro dei neutroni impiegati era di 30 keV, è stato impossibile mettere in evidenza effetti di polarizzazione per questa risonanza. Sono state ripetute le misure degli effetti di polarizzazione (^{1a}) ad $E_n = 3,32$ MeV ma per un azimut dei neutroni emessi nella reazione D, D aumentato di 180°. Si confermano i risultati delle prime esperienze. La polarizzazione dei neutroni D, D per $E_d = 610$ keV e angolo di emissione nel laboratorio $\alpha = 45^\circ$ risulta $P \geq 20\%$. Vengono calcolate le $\sigma(\theta, \varphi)$ secondo LEPORE (⁶) e VERDE (⁷) in funzione di θ , assumendo come parametro l'azimut φ . Si mostra così l'andamento della sezione d'urto differenziale ottenibile in presenza di effetti di polarizzazione.

Studio dell'azione di vari metodi di sviluppo nella formazione del fondo delle emulsioni nucleari.

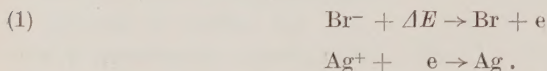
G. ALVIAL C.

Departamento de Física, Facultad de Filosofía y Educación - Universidad de Chile

(ricevuto il 3 Agosto 1953)

Riassunto. — Si investigano le leggi di formazione del fondo (fog) delle emulsioni nucleari di varia sensibilità in funzione della tecnica usata nel rispettivo processo di sviluppo.

1. — Nel processo di formazione dell'immagine latente nelle emulsioni nucleari bisogna considerare, in primo luogo, la reazione fotolitica:



La reazione anteriore è valida qualunque sia il processo di formazione dell'immagine latente nella rete cristallina degli alogenuri d'argento ^(1,2). È opportuno far risaltare che il ΔE della reazione fotolitica rappresenta un'energia di ionizzazione causata da diversi agenti: perdita di energia delle particelle cariche che attraversano l'emulsione, processi foto-ionizzanti, variazioni termiche, pressioni meccaniche, reazioni chimiche.

Alla formazione del fondo delle emulsioni nucleari (fog) contribuiscono soprattutto i processi di manifattura, agenti termici, meccanici e chimici.

L'autore di questo lavoro studia la formazione del « fog » in funzione dei fattori fisico-chimici corrispondenti ai diversi metodi di sviluppo delle emul-

⁽¹⁾ R. M. GURNEY e N. F. MOTT: *Proc. Roy. Soc.*, A **164**, 151 (1938).

⁽²⁾ J. W. MITCHELL: *Bull. Soc. Roy. Sci. Liège*, **20**, 300 (1951).

sioni: in altre parole, stabilisce condizioni sperimentali tali che il ΔE di (1) venga proporzionato preferibilmente dagli agenti fisico-chimici dei diversi metodi di sviluppo.

2. — Le emulsioni nucleari usate furono di fabbricazione Eastman Kodak dei tipi NTA, NTB e NTB3 di 200 μ di spessore. Soltanto in un esperimento si usarono emulsioni NTA di 150 μ di spessore.

Gruppi di lastre dei diversi tipi furono sottoposti a quattro metodi di sviluppo: *a*) quello indicato da BLAU e DE FELICE ⁽³⁾; *b*) il metodo di «hot-plate» con sviluppatore D19b (metol-idrochinone) e con i tempi indicati da DANTON, GATTIKER e LOCK per emulsioni di 200 μ di spessore ⁽⁴⁾; *c*) sviluppo in azolo (paraminofenolo) identico al metodo indicato dagli autori precedentemente citati per emulsioni di 200 μ di spessore; *e*, *d*) un processo di sviluppo simile a quello che consiglia la fabbrica Eastman Kodak per lastre del medesimo spessore ⁽⁵⁾. Sostanzialmente l'ultimo processo è analogo a quello descritto da WILSON e VANSELOW ⁽⁶⁾: D19 (elón-idrochinone) diluito di 1:1 a 5 °C per 30 minuti e D19 di 1:3 a 20 °C per 30 minuti. Indicheremo ognuno di questi processi con i suoi nomi usuali: il primo come sviluppo in «due bagni», il secondo, «hot-plate», il terzo, sviluppo in «due temperature» con azolo, e l'ultimo in «due temperature» con D19.

Tutte le lastre furono sottoposte a un pre-lavaggio per 30 minuti; dopo, al corrispondente processo di sviluppo; poi, ad un bagno contenente acido acetico al 1/2%; il fissaggio si effettuò in una soluzione di tiosolfato di sodio al 10%, e, prima che le lastre si asciugassero, furono immerse — per un'ora — in una soluzione di glicerina al 10%, come indica MIGNONE ⁽⁷⁾. Le lastre vennero asciugate senza corrente d'aria.

Le emulsioni furono osservate per immersione in un microscopio Universale Galileo con un ingrandimento di 3700 diametri, corrispondente ad una superficie osservabile di 1344 μ^2 .

Le misure si realizzarono su un totale di 50 lastre.

3. — In ogni caso è stata misurata la densità dei granuli del fondo dell'emulsione (fog) in funzione della profondità. Tanto il primo strato quanto l'ultimo misurato si presero a 5 μ dalla superficie e dal vetro rispettivamente, allo scopo di evitare nelle misure il «fog» originato da cause estranee a quelle del processo di sviluppo.

⁽³⁾ M. BLAU e J. A. DE FELICE: *Phys. Rev.*, **74**, 1198 (1948).

⁽⁴⁾ A. D. DANTON, A. R. GATTIKER e W. O. LOCK: *Phyl. Mag.*, **42**, 396 (1951).

⁽⁵⁾ Bollettini della Eastman Kodak.

⁽⁶⁾ M. J. WILSON e W. VANSELOW: *Phys. Rev.*, **75**, 1144 (1949).

⁽⁷⁾ G. MIGNONE: *Nuovo Cimento*, **8**, 896 (1951).

In ogni lastra si misurarono le densità corrispondenti per lo meno a quattro strati. I diversi grafici danno il numero di granuli per ogni $1344 \mu^2$ di superficie osservabile in funzione della profondità.

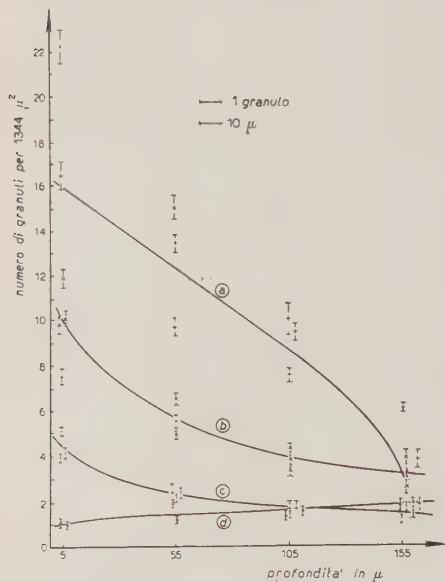


Fig. 1.

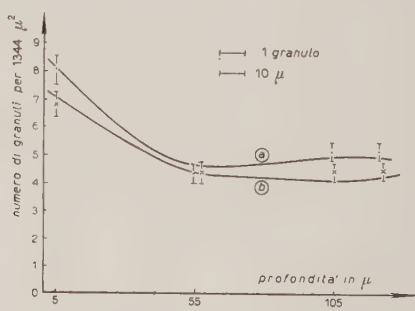


Fig. 2.

considerare che il tipo di emulsione è differente da quello usato da MIGNONE nel suo lavoro.

Le curve *a*, *b*, *c* e *d* della fig. 1 corrispondono ad emulsioni del tipo NTA sviluppate in due temperature con azolo, in due temperature con D19, in due bagni a «hot-plate» rispettivamente. Ogni curva rappresenta le misure medie di tre lastre, eccezione fatta della curva *d*, che rappresenta soltanto le misure medie di due lastre. I valori particolari di ogni lastra sono segnalati nel grafico. Tutte le lastre osservate sono state scelte da un medesimo gruppo, sono di identica manifattura e sono state sviluppate in un periodo di 60 giorni, nell'ordine seguente: gruppo *b*, gruppo *c*, gruppo *a* e gruppo *d*. Le condizioni di magazzinaggio in questo frattempo sono state normali.

La fig. 2 rappresenta il numero di granuli per $1344 \mu^2$ in funzione della profondità per due lastre tipo NTA delle quali una è stata sottoposta a «fading» in una soluzione al 3‰ di CrO_3 ⁽⁸⁾ e l'altra non è stata sottoposta a questo processo. Esse sono rappresentate dalle curve *a* e *b* rispettivamente.

⁽⁸⁾ N. A. PERFILOV: *Compt. Rend. Acad. Sci. URSS*, **42**, 258 (1944).

Ambedue sono state sviluppate in due temperature con D19. Sostanzialmente appartengono alla famiglia corrispondente alla curva *b* della fig. 1.

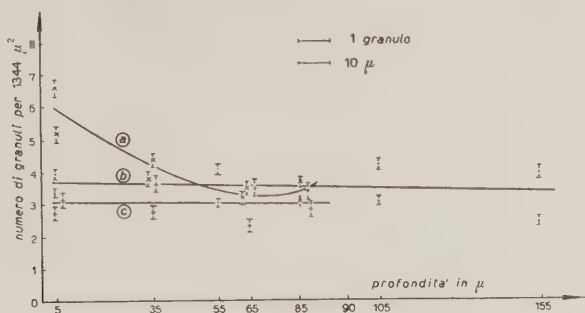


Fig. 3.

La fig. 3 riassume i risultati degli esperimenti ottenuti per emulsioni del tipo NTB. La curva *a* è la curva media di misure realizzate su due lastre sviluppate in due bagni; la curva *b*, di due lastre sviluppate in due temperature con D19; e la *c*, di due lastre sviluppate con il metodo di « hot-plate ». Tutte sono di una medesima serie, di uguale manifattura e sviluppate in un periodo di tre giorni.

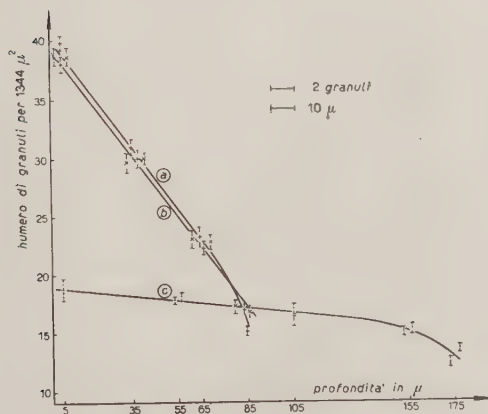


Fig. 4.

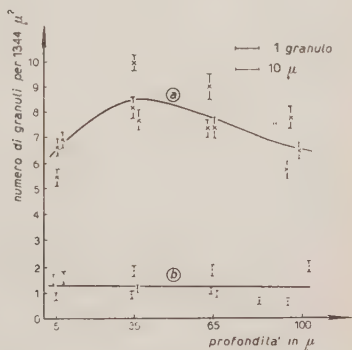


Fig. 5.

Le curve *a*, *b*, *c* della fig. 4 sono le curve medie di due lastre ognuna, del tipo NTB3, sviluppate rispettivamente con i metodi « hot-plate » in due bagni e in due temperature con D19.

Infine, le curve *a* e *b* della fig. 5 rappresentano curve medie di misure

realizzate in tre lastre, ognuna dello spessore di $150\ \mu$, del tipo NTA. Il gruppo *a* venne sviluppato con il metodo di «hot-plate», ma negli ultimi cinque minuti dello sviluppo, la temperatura si elevò a $40\ ^\circ\text{C}$, di modo che la superficie delle emulsioni si asciugò completamente. Il gruppo *b* non passò al «plate», ma rimase un tempo equivalente nello sviluppo a $5\ ^\circ\text{C}$.

In analoghi esperimenti realizzati con le rimanenti 19 lastre, è stato ottenuto un accordo totale con le precedenti per le curve densità-profondità delle emulsioni del tipo NTA e NTB; e solo parzialmente per il tipo NTB3. Questo accordo non consiste tanto nei valori numerici (sebbene essi non si allontanino sensibilmente dai casi analoghi precedentemente descritti), quanto nella forma di variazione della densità del «fog» in funzione della profondità.

4. — In ogni strato si determinò la distribuzione della fluttuazione statistica della densità granulare, che risultò gaussiana. I pochi casi di fluttuazioni lontane dalle normali, corrisposero esattamente a misure di fenomeni spuri o malamente realizzati (isolotti affetti da radioattività, osservazioni in cattive condizioni ottiche, ecc.).

Nelle lastre rappresentate dalla curva *a* della fig. 1 si osserva un «fog» costituito da granuli d'argento di diametri normali ($0,4\ \mu$) ed un altro fondo formato da innumerevoli e finissimi granuli d'argento. Nella detta curva interviene soltanto il primo tipo di «fog»: perciò essa non riflette fedelmente il fenomeno in istudio.

La densità granulare negli altri tipi di lastre sviluppate con azolo è notevolmente elevata e tale da impedire il passaggio della luce per trasparenza all'osservazione microscopica. Per questo motivo non appariscono nei diversi grafici le curve corrispondenti al trattamento con azolo.

Nella fig. 2 si confrontano le curve densità-profondità di due lastre, di cui una — lastra *b* — è stata sottoposta al «fading» e l'altra no. Ambedue sono state sviluppate contemporaneamente in due temperature con D19 esattamente un mese dopo lo sviluppo della serie analoga rappresentata dalla curva *b* della fig. 1. Esse appartengono sostanzialmente alla medesima famiglia della curva *b* della fig. 1, nonostante la differenza di tempo nello sviluppo. Si osserva inoltre che la curva della lastra nella quale è stato effettuato il «fading» non si allontana notevolmente dall'altra. Il medesimo risultato è stato ottenuto in esperimenti analoghi realizzati con emulsioni del tipo NTA e sottoposte ad altri metodi di sviluppo.

Un gruppo di lastre NTA di $200\ \mu$ venne sottoposto a riscaldamento fra $30\ ^\circ\text{C}$ e $83\ ^\circ\text{C}$ prima del rispettivo processo di sviluppo. Sviluppate in due temperature con D19, le curve densità-profondità non mostrarono differenze fondamentali con la curva *b* della fig. 1.

Questo trattamento, come quello del «fading» indica chiaramente che nella

formazione del fondo delle emulsioni nucleari intervengono direttamente i fattori fisico-chimici del metodo di sviluppo e quelli della stessa emulsione.

Diversi autori hanno fatto riferimento a detti fattori in lavori di altro carattere. I fattori che ci interessano sono: 1) variazione del pH della soluzione sviluppatrice nell'emulsione; 2) durata di penetrazione dello sviluppatore nella emulsione; 3) conduttività termica dell'emulsione; 4) natura chimica della soluzione sviluppatrice.

Il fattore 3) rimane chiaramente esposto nell'esperimento rappresentato nella fig. 5. La curva *b* indica che la densità del « fog » delle emulsioni sviluppate a 5 °C non è significativa, in cambio la curva *a* mostra un massimo ben definito. Ciò può essere interpretato nel seguente modo: le lastre collocate nel « hot-plate » a 27 °C si svilupparono uniformemente, all'elevarsi della temperatura a 40 °C durante 5 minuti e all'evaporare del liquido sviluppatore dalla superficie delle emulsioni, l'azione sviluppatrice si intensificò negli strati intermedi dell'emulsione dove ancora restava soluzione sviluppatrice, ma non negli strati vicini al vetro, che per ragioni di conduttività termica non riuscirono a raggiungere la temperatura di 40 °C.

Un'analisi della fig. 1 indica ciò che segue: la retta quasi parallela all'asse delle profondità — retta *d* — mostra che lo sviluppatore penetrò totalmente e che tutta l'emulsione si riscaldò ad una medesima temperatura. Perciò, i fattori 2) e 3) non spiegano la diminuzione delle curve *b* e *c*. Posto che queste rappresentano i processi eseguiti con i metodi di Wilson-Vasenlow e Blau-De Felice, metodi che quasi non differiscono chimicamente, rimane soltanto il fattore 1). D'altro lato, le curve di densità costante per il primo di questi metodi in emulsioni del tipo NTB e NTB3 e le curve di densità sempre decrescente corrispondenti ad emulsioni dei medesimi tipi sviluppate con il metodo di Blau-De Felice inducono a far notare che, per il metodo in due temperature con D19, esiste una variazione del pH nelle emulsioni NTA e che non esiste siffatta variazione negli altri tipi di emulsioni sviluppate con questo stesso metodo. D'altra parte, in base a questa medesima analisi si può accettare un'azione sviluppatrice della soluzione *A* nel metodo in due bagni per ogni tipo di emulsione.

Le curve di densità costante corrispondenti ad emulsioni del tipo NTA e NTB sviluppate con il metodo di « hot-plate » e di densità decrescente per il tipo NTB3 sviluppate con il medesimo metodo, indicherebbero una variazione della conduttività termica per quest'ultimo tipo di emulsione.

Tanto la variazione del pH, quanto la variazione della conduttività termica si possono spiegare a causa della differenza nella granulazione delle emulsioni.

Infine, la maggior densità granulare del « fog » per le emulsioni NTB3 è funzione della sensibilità delle suddette emulsioni. Detta sensibilità spiegherebbe anche le variazioni parziali delle curve densità-profondità in emulsioni

del tipo NTB3. La grande densità che si nota in tutte le emulsioni trattate con azolo è dovuta all'influenza del fattore 4).

5. - Attualmente è in corso in questo laboratorio una ricerca per determinare la correlazione esistente tra i precedenti risultati e la densità granulare delle tracce nucleari. Per cause segnalate da altri autori ⁽⁹⁾, si lavora con primari di grande energia della radiazione cosmica.

Ringrazio l'illustre Decano della Facultad de Filosofía y Educación de la Universidad de Chile, attuale Ministro de Educación Pública, Prof. JUAN GÓMEZ MILLAS per il suo costante interessamento per questo lavoro. Il prof. GÓMEZ MILLAS non solo ha fornito i mezzi economici per il suo sviluppo, ma ha dato anche tutto l'aiuto per l'organizzazione del centro di studi della radiazione cosmica.

Porgo i più sentiti ringraziamenti alle mie assistenti signorine SILVIA STANTIC A., LUISA FERNÁNDEZ M. ed ELISA SILVA M. per la loro valida collaborazione nell'esecuzione sperimentale di questo lavoro.

Ringrazio il signor O. ANDOLCETTI, gerente della Kodak Cilena, per la sua efficace azione diretta ad importare in Cile le emulsioni nucleari della fabbrica Eastman Kodak, e la prof. R. M. VALLI per la traduzione dallo spagnolo in italiano del presente lavoro.

⁽⁹⁾ L. JAUNEAU e F. HUG-BOUSSER: *Journ. Phys. Rad.*, **13**, 31 (1952).

SUMMARY

The Author studies formation laws of fog in nuclear emulsions of different sensibilities, as a function of the correspondent development method.

Determination of the Age of the Earth from the Isotopic Composition of Meteoritic Lead.

F. G. HOUTERMANS

Physikalisches Institut der Universität Bern (Svizzera)

(ricevuto il 21 Settembre 1953)

Summary — Under the assumption that *a*) the isotopic constitution of lead at the time of the formation of the lithosphere is represented by the figures found for lead from the troilite phase of the Cañon-Diablo meteorite [Pat 53] and *b*) the majority of tertiary lead ores analysed for isotopic constitution has been formed according to the simple model of primary origin (equ. 3), the age of the lithosphere w follows as $w = 4,5 \pm \pm 0,3 \cdot 10^9$ a.

Several authors [Ger 42, Hol 46,47, Hou 46,47, Bu 49, Co 52] have calculated the time w since the formation of the lithosphere from the isotopic abundances of common lead, using the data given by A. O. NIER [Ni 38] and additional data, published by COLLINS, FARQUHAR, RUSSELL [Co 52]. All these calculations are based on the following simplified model for the formation of a lead ore or lead mineral. If we denominate the ratio of the numbers of Pb^{206} and Pb^{207} atoms to the number of Pb^{204} atoms in given Pb-mineral as α , β respectively

$$(1) \quad \frac{(\text{Pb}^{206})}{(\text{Pb}^{204})} = \alpha, \quad \frac{(\text{Pb}^{207})}{(\text{Pb}^{204})} = \beta$$

and if we assume the value of these ratios at the time w to be universally α_w , β_w , and μ is or would be the present geochemical ratio

$$(2) \quad \mu = \frac{\text{U}^{238}}{\text{Pb}^{204}}$$

in the particular rock or rock component from which the lead ore has been formed, then the amount of Pb^{206} and Pb^{207} present at the time p of the formation of the lead mineral as a function of p is given by

$$(3a) \quad \alpha = \alpha_w + \mu (e^{\lambda w} - e^{\lambda p})$$

$$(3b) \quad \beta = \beta_w + \frac{\mu}{139} (e^{\lambda' w} - e^{\lambda' p})$$

Equ. (3) gives in an α, β diagram the « lines of lead development » for constant values of μ as a function of the time. By dividing (3b) by (3a) the equations of « isochrones » are obtained

$$(4) \quad \frac{\beta - \beta_w}{\alpha - \alpha_w} = \frac{1}{139} \frac{e^{\lambda' w} - e^{\lambda' p}}{e^{\lambda w} - e^{\lambda p}}$$

These are a number of straight lines, intersecting at the point α_w, β_w corresponding to the isotopic constitution of « primeval lead » at the time w . Principally it is possible to extrapolate these isochrones graphically or to calculate the values of α_w, β_w , from the α, β values of 3 different lead samples of at least 2 different ages p . This has been done by the authors mentioned above, leading to the values given in Table I. The values for w obtained by all the authors coincide fairly closely, thus leading to the generally accepted value (*) of the earth's age

$$w = 3,3 \pm 0,3 \cdot 10^9 \text{ a.}$$

TABLE I.

| Author | w (10^9 a) | α_w | β_w | γ_w |
|---|--------------------|------------|-----------|------------|
| S. K. GERLING [Ger 42] | 3.23 | — | — | — |
| A. HOLMES [Hol 46] | 3.0 | 12.50 | 14.28 | 31.82 |
| F. G. HOUTERMANS [Hou 46, Hou 47] | 2.9 | 11.52 | 14.03 | 31.6 |
| A. HOLMES [Hol 47] | 3.35 | 10.95 | 13.51 | — |
| E. C. BULLARD <i>et al.</i> [Bu 49] . . . | 3.29 | 11.86 | 13.86 | — |
| C. B. COLLINS <i>et al.</i> [Co 52] | 3.5 | 11.33 | 13.55 | 31.10 |

(*) G. GAMOW: *Dan. Mat. Fys. Medd.*, **27**, Nr. 10 (1953); P. JORDAN: *Schwerkraft und Weltall* (Braunschweig, 1952); *Address by Pope Pius XII to the Pontifical Academy of Sciences on November 22, 1951* (Tipografia Poliglotta Vaticana, Rome, 1951); C. F. VON WEISZÄCKER: *Die Geschichte unserer Welt* (1951).

It has been pointed out by the author [Hou 47, Br 47] that there are strong indications to find the Pb contained in iron meteorites to be very close to the isotopic constitution of primeval lead because the chemical ratio U/Pb in iron meteorites from then available data [Go 38] seemed to be $1.8 \cdot 10^{-2}$, i.e. considerably less than for instance in igneous rocks from which most Pb minerals are supposed to be derived.

Through the courtesy of the authors a very important paper by C. PATTERSON, G. TILTON, M. INGRAM, H. BROWN [Pat 53] came to our knowledge before its publication which is apt to throw an entirely new light on the questions involved. Though these authors found the content of Pb in iron meteorites to be considerably less than given above, the experimental ratio U/Pb in the troilite phase of the Cañon-Diablo Meteorite was found to be as low as 1/2000.

TABLE II. — *Isotopic Abundance of Lead in Cañon Diablo Meteorite.*

| | $\alpha = \frac{(\text{Pb}^{206})}{(\text{Pb}^{204})}$ | $\beta = \frac{(\text{Pb}^{207})}{(\text{Pb}^{204})}$ | $\gamma = \frac{(\text{Pb}^{208})}{(\text{Pb}^{204})}$ |
|-----------------------|--|---|--|
| Troilite | 9.41 | 10.27 | 29.16 |
| Metal Phase | 9.7 | 10.5 | 29.3 |

The values found by PATTERSON *et al.* for α and β given in Table II indicate very strongly that the lead analysed has never been associated for any considerable time with a proportion of uranium or thorium of the same order of magnitude as in the lithosphere. Of course it is impossible to conclude from the present low value of μ found by these authors that the value of μ for the material from which the meteorite has been formed was as low as it is found at present since Paneth's experiments on the He-age of meteorites [Pan 52] make it very probable that the age of the iron meteorites range from a few millions up to 10^8 years only. The maximum He-age for the Cañon Diablo Meteorite—even if all its Helium is ascribed to radioactive production has been given by PANETH *et al.* [Ar 42] as $5.5 \cdot 10^8$ a. Yet the low values of α , β found for Pb in both the troilite and the iron phase of the meteorite in itself seem to justify at the present state of evidence the assumption that the actual values of α_w , β_w are very close to the α , β values found for the troilite phase of the Cañon Diablo Meteorite. All experiences on the comparison of isotopic abundances of other medium and heavy elements have shown their identity of isotopic constitution in meteoritic and terrestrial material. We therefore have good reasons to assume that the isotopic constitution of «primeval lead» at the time of the formation of the lithosphere was very similar to the values

found for meteoritic lead. We therefore assume, as an hypothesis.

$$(5) \quad \alpha_w = 9,41, \quad \beta_w = 10,27,$$

from the mere fact that such lead does exist. We can now construct the isochrones for any given value of p , using the geological value for the particular age of the galena under the assumption that most lead samples are of primary origin. We shall call a lead mineral to be of primary origin if its development has followed the evolution model given by equ. (3) from the formation of the lithosphere up to time p without change of the value μ in the parent rock. Assuming specially that the majority of tertiary lead ores are of primary origin in the sense given above, we obtain for the inclination of the isochrone for all these lead ores

$$(6) \quad \left(\frac{\beta_{30} - \beta_w}{\alpha_{30} - \alpha_w} \right) = 0,5793 \pm 0,004,$$

leading to a new value for w from (4) ($p \approx 30 \cdot 10^6$ a)

$$(7)$$

$$w = (4.5 \pm 0.3) \cdot 10^9 \text{ a}.$$

The list of tertiary lead minerals which have been used for the calculation of (6) and (7) is given in Table III together with their individual values for $(\beta - \beta_w)/(\alpha - \alpha_w)$. For calculating our value of w , we prefer to use only isotopic abundances of young samples, since for these the resulting value w is exceedingly insensitive against an error in the determination of geological age, even if their ages are uncertain up to 200 million years.

TABLE III.

| Number (*) | Mineral and Source | $\frac{\beta - \beta_w}{\alpha - \alpha_w}$ |
|------------|--|---|
| N11 | Wulfenite and Vanadinite, Tucson Mts., Arizona . | 0.5851 |
| N16 | Bournonite, Casapalca Mine, Peru | $\left. \begin{array}{l} 0.5649 \\ 0.5528 \end{array} \right\}$ |
| N17 | Galena, Casapalca, Peru | $\left. \begin{array}{l} 0.5757 \\ 0.5669 \end{array} \right\}$ |
| N21 | Galena, Durango, Mexico | 0.5839 |
| N23 | Galena, Sonora Mine, Arizona | 0.6014 |
| N24 | Galena, Freiberg, Saxony | 0.5924 |
| C5 | Bolivia | 0.5866 |
| V1 | Montenegro, Bolivia | 0.5911 |
| G14 | Galena, sample 14, Wiesloch, Germany | 0.5755 |
| G15 | Galena, sample 35, Wiesloch, Germany | 0.5755 |

(*) Numbers given by the authors in original publications. Letters N, C, V, E, G mean (N138), (Co52), (V152), (Eh53), (Gei 53).

As has been pointed out by several authors [Hol 47, Je 48, Je 49, Bu 49, Gei 52], we find samples which cannot be considered as primary ores in the sense given above, since their α , β -values would lead to negative values for their « model age » p . These exceptions are the determinations given in the Table IV. It is of course arbitrary to a certain extent which samples to exclude

TABLE IV.

| Number (*) | Deposite |
|-----------------------|------------------------------------|
| N7, N8, N14, V23, V24 | Joplin, U.S.A. |
| N9 | Metalline Falls, Wash. |
| C20 | Upper Canada Mine, Ontario |
| C22 | Box Mine, Goldfields, Canada |
| C25 | Garson Mine, Sudbury, Ontario |
| C26 | Worthington Mine, Sudbury, Ontario |
| V27 | Northern Ural |
| V29 | Priibalchashia, Central Kasakstan |

(*) See footnote from Table III.

and it will be necessary to assemble more statistical data for a more reliable calculation of w . Yet the assumption that most lead minerals can indeed be considered as primary seems to be justified by the fact that only 8 deposits among 87 lead to « negative » model ages. This means that no appreciable change in the value of μ in the parent rock material has taken place during their development from the time w till the time p of the formation of the lead minerals. The apparently negative values of p , can, however, be explained easily if these ores are considered as having secondary origin. This means that a change in the value of μ has taken place in their parent material at a certain date. It has been shown by VINOGRADOV *et al.* [Vi 52] and in more detail by GEISS [Gei 53] that a change in the value of μ can easily lead to values α , β beyond the isochrone for $p = 0$, if the values of μ had been increased. Indeed if in a parent rock with a given value μ , a change of μ to μ' has taken place at the time p' the values α , β reached at the time p are given by:

$$(8) \quad \begin{cases} \alpha = \alpha_w + \mu(e^{\lambda w} - e^{\lambda p'}) + \mu'(e^{\lambda p'} - e^{\lambda p}), \\ \beta = \beta_w + \frac{\mu}{139}(e^{\lambda' w} - e^{\lambda' p'}) + \frac{\mu'}{139}(e^{\lambda' p'} - e^{\lambda' p}). \end{cases}$$

It can, however, easily be seen, that even if we do not exclude the samples given above as of secondary origin because of their apparently negative « model

age » the value of w is not considerably altered. In fact, taking the values of α_w , β_w given in (5) and assuming for the Joplin galena the average values of all its determinations

$$\alpha = 21.95, \quad \beta = 15.90,$$

$$p = 200 \text{ Ma},$$

the value of w obtained would be

$$w_{\text{Joplin}} = 4.05 \cdot 10^9 \text{ a}.$$

This value may be considered as a kind of lower limit of w , resulting if the samples with extremely low percentages of Pb^{204} are to be considered as of primary origin. One sees therefore, that an average value of w taken from data on all lead samples will hardly be influenced by ascribing primary origin to the few samples which are most probably secondary.

It would be of extreme importance for the verification of the assumed model of lead ore formation, if it were possible to find purely geological evidence for the hypothesis that the lead ores given in Table IV are indeed of secondary origin.

The new values α_w , β_w and w (5), (7) are in agreement with the α , β values not only for tertiary lead samples but also with those of the majority of most other dated samples of older age within the limits of error in α , β and their geological age. Table V shows a comparison of the geological ages with the « model ages » calculated from (4) for all dated lead samples, for which the isotopic abundance has been measured hitherto.

In comparing geological ages with « model ages » it must be remembered that the geological ages of ore deposits do not necessarily mean the time of the separation of the lead mineral from its parent rock material, but in many cases may mean the time at which the deposit has reached its present position. A discrepancy between « geological age » and « model age » must therefore not necessarily mean that a lead deposit is to be considered of secondary origin.

We have geologically to distinguish between 3 different classes of lead deposits:

1) Those, which may be considered to be of primary origin. For these deposits geological age should coincide with the « model age » within their limits of error.

2) Deposits, for which « model age » is inferior to geological age. Such deposits, especially those corresponding to a « model age » < 0 must be considered to be of secondary origin with an increase of μ during the development between the times w and p .

TABLE V.

| Nr. (*) | Mineral and Source | Geological Age (10 ⁶ a) | Model Age p (10 ⁶ a) (**) |
|----------------|--|---------------------------------------|---|
| N1 | Galena, Great Bear Lake, Canada . . . | 1 400 [Fa 53] | 1 600 \pm 70 |
| N2 | Galena, Broken Hill, N. S. Wales . . . | 1 500 [Fa 53] | 1 600 \pm 70 |
| N3 | Cerussite, Broken Hill, N. S. Wales . . . | 1 500 [Fa 53] | 1 600 \pm 70 |
| N4 | Galena, Yancey, Col., N.C. | 220 [Fa 53] | 180 \pm 70 |
| N5 } V21 } | Galeña, Nassau, Germany | 220 [Fa 53] | 380 \pm 70 |
| N6 | Cerussite, Eifel, Germany | 220 [Fa 53] | 180 \pm 70 |
| N7 } N8 } | | | |
| N14 | Galena, Joplin, Missouri | 230 [Fa 53] | negative |
| V23 | | | |
| V24 | | | |
| N9 | Galena, Metalline Falls, Wash. | 60 [Fa 53] | negative |
| N10 | Cerussite, Wallace, Idaho | 60 [Fa 53] | 1 400 \pm 70 |
| N12 } V22 } | Galena, Saxony, Germany | 220 [Fa 53] | 800 \pm 70 |
| N15 | Galena, Tetreault Mine, Canada | 1 030 [Fa 53] | 1 300 \pm 70 |
| N18 | Galena, Clausthal, Harz, Germany | 220 [Fa 53] | 220 \pm 70 |
| N19 | Galena, Przibram, Bohemia | 220 [Fa 53] | 500 \pm 70 |
| N20 | Galena, Franklin, New Jersey | 400 [Fa 53] | 900 \pm 70 |
| C10 | Katanga, Belgian Congo | 630 [Fa 53] | 1 100 \pm 100 |
| C12 | Frontanac Co., Ontario | 1 030 [Fa 53] | 1 100 \pm 100 |
| C15 | Negus Mine, Great Slave Lake, Canada | 1 850 [Fa 53] | 2 500 \pm 100 |
| C16 | Rex, Stark Lake, Canada | 1 850 [Fa 53] | 1 700 \pm 100 |
| C17 | Sioux Lookout, Ontario | 2 480 [Fa 53] | 2 700 \pm 150 |
| V2 | Primaje DWK | 50 [Vi 52] | 80 \pm 250 |
| V3 | Seravezza, Italy | 50 [Vi 52] | 600 \pm 250 |
| V4 | DWK | 60 [Vi 52] | 600 \pm 220 |
| V5 | Sangesur, Armenian Rep. | 60 [Vi 52] | 400 \pm 250 |
| V6 | Northern Caucasus | 60 [Vi 52] | 220 \pm 250 |
| V7 | Jakutia | 100 [Vi 52] | 160 \pm 250 |
| V8 | Boleslav, Karpatian mountains | 130 [Vi 52] | 500 \pm 250 |
| V9 | Northern Caucasus | 130 [Vi 52] | 500 \pm 220 |
| V10 | Sadon, Northern Caucasus | 130 [Vi 52] | 700 \pm 250 |
| V11 | Armenian Republic | 130 [Vi 52] | 400 \pm 250 |
| V12 | Trans-Baikalia | 180 [Vi 52] | 600 \pm 250 |
| V13 | Southern Kirgisia | 200 [Vi 52] | 1 100 \pm 220 |
| V14 | Kuramenian Country (Central Asia) | 200 [Vi 52] | 1 000 \pm 200 |
| V15 | Northern Kirgisia | 200 [Vi 52] | 500 \pm 250 |
| V16 | Kirgisia Republic | 200 [Vi 52] | 340 \pm 250 |
| V17 | Kuramenian Country (Central Asia) | 220 [Vi 52] | 600 \pm 250 |
| V18 | Southern Saboi, Altai | 220 [Vi 52] | 900 \pm 250 |

(*) See footnote from Table III.

(**) Used values for calculation: $\alpha_w = 9.41$, $\beta_w = 10.27$, $w = 4.46 \cdot 10^9$ a, $\lambda = 0.1535 \cdot 10^{-9}$ a, $\lambda' = 0.9815 \cdot 10^{-9}$ a.

Cont. TABLE V.

| Nr. (*) | Mineral and Source | Geological Age (10 ⁶ a) | Model Age <i>p</i> (10 ⁶ a) (**) |
|----------------------|---|---------------------------------------|--|
| V19 | West Tan Shan | 220 [Vi 52] | 440 ± 250 |
| V20 | Karatau | 220 [Vi 52] | 600 ± 250 |
| V25 | Nagolnij Krjash, Ukraina | 260 [Vi 52] | 700 ± 250 |
| V26 | Western Priibalkalia | 260 [Vi 52] | 900 ± 200 |
| V27 | Northern Ural | 320 [Vi 52] | negative |
| V28 | NW Kasakstan | 320 [Vi 52] | 500 ± 300 |
| V29 | Priibalchashia, Central Kasakstan | 320 [Vi 52] | negative |
| V30 | Central Kasakstan | 320 [Vi 52] | 300 ± 250 |
| V31 | Karelo-Finnian Republic | 1 600 [Vi 52] | 2 400 ± 280 |
| V32 | Kinon-Kosiala, Finland | 1 600 [Vi 52] | 2 300 ± 280 |
| E1a | Galena Meggen, Gravel Deposit, Germany | 300 [Eh 53a] | 480 ± 70 |
| E1b } G24 } | Galena Meggen, Germany | 300 [Eh 53a] | 380 ± 80 |
| E2 | Schapbach, Germany | 200 [Eh 53b] | 80 ± 70 |
| G1 } G2 } G3 } | Galena Mühlenbach, Germany | 300 [Gei 53] | 360 ± 50 |
| G4 } G5 } | Galena Christian Lewin Mine, Germany | 200 [Gei 53] | 340 ± 60 |
| G6 | Galena Oberharz HG 687, Germany | 220 [Gei 53] | 180 ± 70 |
| G7 | Galena Oberharz BW 292, Germany | 220 [Gei 53] | 120 ± 60 |
| G8 } G9 } | Galena Schauinsland, Freiburg, Germany | 200 [Gei 53] | 80 ± 60 |
| G10 } G11 } | Galena Lüderich, Germany | 300 [Gei 53] | 380 ± 70 |
| G12 } G13 } | Galena Holzappel, Germany | 300 [Gei 53] | 340 ± 70 |
| G16 } G17 } | Galena Rammelsberg, Goslar, Germany | 300 [Gei 53] | 360 ± 60 |
| G18 } G19 } | Galena Ramsbeck, Germany | 240 [Gei 53] | 380 ± 80 |
| G20 } G21 } | Galena Maubach, Germany | < 170 [Gei 53] | 200 ± 70 |
| G22 | Galena Königstiel, Germany | 300 [Gei 53] | 400 ± 50 |
| G23 | Galena St. Andreasberg, Harz, Germany | 220 [Gei 53] | 220 ± 50 |
| G25 | Galena Altmannshausen near Würzburg, Germany | 150 [Gei 53] | 160 ± 50 |
| G26 | Galena Stiftsberg Heilbronn, Germany | 150 [Gei 53] | 200 ± 60 |
| G27 | Galena Hertmannsweiler near Stuttgart, Germany | 150 [Gei 53] | 200 ± 60 |
| G28 | Galena Linsenberg, Rottweil, Germany | 150 [Gei 53] | 200 ± 50 |
| G29 | Galena Mitwaba, Belgian Congo | 1 100 [Ca 51] | 1 100 ± 70 |

(*) See footnote from Table III.

(**) Used values for calculation: $\alpha_0 = 9.41$, $\beta_0 = 10.27$, $w = 4.46 \cdot 10^9$ a, $\lambda = 0.1535 \cdot 10^{-9}$ a, $\lambda' = 0.9815 \cdot 10^{-9}$ a.

3) Lead deposits, for which «model age» is superior to geological age. Samples of this type are V13 and N12. It seems that this type of deposits has been formed at a much earlier date than indicated by their geological age.

A full discussion of the application of the formation model (3) and (8) of lead minerals and their geological applications shall be given elsewhere [Gei 54].

There have been many discussions on the actual meaning of the time w . As has been pointed out before [Hou 47], we may consider two limiting cases:

1) If the cosmochemical value of μ , i.e. the value of μ for our planetary system as a whole is the same as for our lithosphere, the time w means the «age of uranium» i.e. the time at which elementary processes by which uranium was produced ceased to exist in our planetary system.

2) In case the geochemical value of μ , which from the evidence of lead minerals analysed seems to vary between 8 and 11 in the rock material and which may be ~ 10 for the lithosphere as a whole from present geochemical evidence, did change considerably at the time of the formation of the lithosphere, w means the time at which this formation has taken place. In all other cases, f.i. if there was a gradual increase of μ during the time of the formation of the lithosphere, w is defined by a more complicated integral. The details of these calculations will be given elsewhere [Gei 54].

There are at present a number of arguments in favour of the second hypothesis. The low values of α , β found for iron meteorites as well as their low values of μ and the well known arguments of the geothermical paradoxon seem to indicate very strongly that a considerable enrichment in U relative to Pb occurred at the time of the formation of the lithosphere, and we may therefore consider w to represent the time at which this increase in μ did occur. It seems very satisfactory that the value of w given here, which therefore may be considered as the «age of the earth», is not much lower than the upper limit of the age of the lithosphere given by ALPHER and HERMAN [Al 51] based on the argument that necessarily $\alpha_w > 0$, which leads to an upper limit

$$w \leq 5.3 \cdot 10^9 \text{ a},$$

and the argument of WEFELMEIER and the author [Hou 47] which allows to calculate the «Age of Uranium» as $\leq 6.0 \cdot 10^9$ a assuming that originally the ratio U 235/U 238 could not have been higher than 1.

The author wishes to express his gratitude to Drs. PATTERSON, TILTON, INGRAM, HARRISON BROWN who very kindly sent us the manuscript of their

very important paper [Pat 53] to be published in *Physical Review*. I thank Mr. J. C. HOUTERMANS and Dr. J. GEISS for their helpful assistance in doing the calculations and him, Dr. EHRENBURG, Dr. PICCIOTTO and Dr. UREY for many valuable discussions.

Note added in proof.

A table of measurements of isotopic constitution of ordinary lead made available to us through the courtesy of Dr. HENRY FAUL of the Geological Survey of the United States contains more analysed samples which have not been included in the calculations in this paper. The figures given in (6) and (7) of this paper, however, are not altered within the limits of error by taking into account these new determinations.

It may be also of interest, that NICOLAYSEN, ALDRICH and DOAK [Fa 53] have found a isotope-controlled Strontium/Rubidium-age for the Lepidolite of Letaba (Transvaal) of $3.85 \cdot 10^9$ a, which seems perfectly possible with the new value of w given in this paper and would be in contradiction with the older estimates of w given in table I.

LITERATURE

- [Al 51] R. A. ALPHER and R. C. HERMAN: *Phys. Rev.*, **84**, 1111 (1951).
- [Ar 42] W. J. ARROL, R. B. JAKOBI and F. A. PANETH: *Nature*, **149**, 235 (1942).
- [Br 47] H. BROWN: *Phys. Rev.*, **72**, 348 (1947).
- [Bu 49] E. C. BULLARD and J. P. STANLEY: *Veröffentl. d. Finn. Geodätischen Institutes*, **36**, 33 (1949).
- [Ca 51] L. CAHEN: private communication.
- [Co 52] C. B. COLLINS, R. M. FARQUHAR and R. D. RUSSELL: *Phys. Rev.*, **88**, 1275 (1952); *Canadian Journ. of Phys.*, **31**, 402 (1953).
- [Eh 53] H. F. EHRENBURG: *Zeits. f. Phys.*, **134**, 317 (1953).
- [Eh 53a] H. EHRENBURG: private communication.
- [Eh 53b] H. F. EHRENBURG: private communication.
- [Fa 53] H. FAUL: *Table of Relative Isotopic Abundances of Common Lead*, to be published by the Geological Society of America (Nuclear Geology).
- [Ger 42] S. K. GERLING: *Dokl. Akad. Nauk*, **34**, 282 (1942).
- [Gei 53] J. GEISS: *Dissertation Göttingen*, 24. Juli 1953; to be published in *Zeits. f. Naturforschung*.
- [Gei 54] J. GEISS and F. G. HOUTERMANS: to be published in *Geochim. Acta*.
- [Go 38] V. M. GOLDSCHMIDT: *Geochemische Verteilungsgesetze der Elemente*, IX, Oslo 1938.
- [Hol 46] A. HOLMES: *Nature*, **157**, 680 (1946).
- [Hol 47] A. HOLMES: *Nature*, **159**, 127 (1947).
- [Hou 46] F. G. HOUTERMANS: *Naturwissenschaften*, **33**, 185 (1946).
- [Hou 47] F. G. HOUTERMANS: *Zeits. f. Naturforschung*, **2a**, 322 (1947).
- [Je 48] H. JEFFREYS: *Nature*, **162**, 822 (1948).

- [Je 49] H. JEFFREYS: *Nature*, **164**, 1046 (1949).
[Ni 38] A. O. NIER: *Journ. Am. Chem. Soc.*, **60**, 1571 (1938).
[Pan 52] F. PANETH, REASBECK, MAYNE: *Geochim. Cosmochim. Acta*, **2**, 300 (1952);
Nature, **172**, 200 (1953).
[Pat 53] C. PATTERSON, G. TILTON, M. INGRHAM and H. BROWN: to be published in
Phys. Rev.
[Vi 52] A. P. VINOGRADOV, K. SADOROSHNIJ and C. J. SYKOV: *Dokl. Akad. Nauk*,
85, 1107 (1951).

RIASSUNTO (*)

Nell'ipotesi che *a*) la costituzione isotopica del piombo all'epoca della formazione della litosfera sia rappresentata dalle cifre trovate per il piombo della troilite del meteorite del Cañon-Diablo [Pat 53] e che *b*) la maggioranza dei minerali di piombo terziari di cui è stata analizzata la costituzione isotopica si sia formata secondo il semplice modello della creazione primaria (eq. 3), si deduce che l'età *w* della litosfera si ottiene dalla formula (4) $w = 4,5 \pm 0,3 \cdot 10^9$ a.

(*) Traduzione a cura della Redazione.

On Quantum Field Theory - I: Explicit Solution of Dyson's Equation in Electrodynamics without Use of Feynman Graphs.

E. R. CAIANIELLO (*)

Istituto di Fisica dell'Università - Roma

Istituto Nazionale di Fisica Nucleare - Sezione di Roma

(ricevuto il 24 Settembre 1953)

Summary. — A compact, explicit expression is given for the term of arbitrary order in the power series expansion of Dyson's S -matrix, for any arbitrary scattering process. The expression thus found for S has a very high degree of symmetry (a fact which the Feynman graph technique could not reveal; our procedure is also free from several shortcomings of this technique), which suggests the existence in the theory of deeper properties. These will be studied in the continuation to this work.

1. — Introduction.

1.1. — In this work, the first of a series on questions concerning quantum field theory and in particular electrodynamics, we show that the customary method for computing the Dyson S -matrix ⁽¹⁾, in which use is made of the so-called Feynman graphs, can be advantageously substituted with a more compact and simpler algorithm. Our method, although equivalent to the first one, demonstrates the existence of remarkable properties of symmetry and recursion in the various terms of the perturbation expansion of the S -matrix, which remain completely hidden by using the graph technique. This study, although essentially of a formal character, is a necessary, preliminary step

(*) This work has been in part performed at the Institut for Theoretisk Fysik, Copenhagen, CERN (European Council for Nuclear Research).

(1) F. J. DYSON: *Phys. Rev.*, **75**, 486, 1736 (1949).

toward the treatment of problems to be dealt with later, such as renormalization, investigation of the convergence of the perturbation expansion, search for a non-perturbative approach, etc. Our main purpose, here, is to introduce appropriate algebraic tools for dealing with questions of this sort: the fact that we consider only electrodynamics is not a limitation in this respect because, as we shall see, the extension to other types of interactions requires only trivial changes from the developments given here. This is borne out from the fact that our results depend, in their essential part, only on the commutation properties of the fields, so that the electrodynamical case, which requires the consideration of fields of both statistics, suffices to give all the information needed in more general instances.

The Feynman graph technique, which has marked a tremendous improvement upon previous computational devices, suffers nevertheless from several, serious shortcomings. It can be used in practice only for the calculation of the very first terms of the power series expansion of an element of the S -matrix, and, even so, only if the number of particles created and destroyed is very small: this last feature forbids its application to problems involving, say, mesons and complex nuclei. More serious than this, from a conceptual standpoint, is the fact that the contribution of a single graph is not a gauge-invariant expression: this shows that the intuitive interpretation usually given to graphs is rather objectionable, and leads one furthermore to suspect that the standard renormalization procedures, in which each graph is treated apart and the different contributions are summed together after renormalization, may be unnecessarily complicated. Worst of all, from our point of view, is, finally, the fact that the graph technique does not lead to compact and formally simple expressions for the terms of the power series expansion; had one such expressions, one might hope to sum the series, at least in some simple cases, so to get a result which, although derived *heuristically* from a perturbation treatment, might well have a more general significance.

The present considerations, which are intended to eliminate these drawbacks, are bound to remain of a merely formal interest until it will be possible to deal satisfactorily with the other questions mentioned before. Well aware as we are of the difficulties of the task still ahead, we feel, however, that this would be an impossible one, were not first clear the formal structure of the S -matrix.

1.2. - Our investigation stems directly from the well known works by DYSON ⁽¹⁾ and WICK ⁽²⁾ and from a work ⁽³⁾ in which it was shown that the

⁽²⁾ G. C. WICK: *Phys. Rev.*, **80**, 268 (1950).

⁽³⁾ E. R. CAIANIELLO and S. FUBINI: *Nuovo Cimento*, **9**, 1218 (1952) referred to in the text as A.

spur of the product of any number of Dirac matrices can be systematically reduced to the evaluation of a pfaffian. We show, by suitably generalizing the algebraic theorems of A, that the analysis of Wick's chronologically ordered products T can be improved so to yield a concise and symmetric expression for any term of the power series expansion of an element of the Dyson S -matrix, irrespective of the number of particles and of the order of the term, gauge-invariance being self-evident: one, indeed, which can be written down at once, as soon as the process and the desired order are specified, by means of extremely simple mnemonic rules, without having at all to go through the rather elaborate algebra of Wick's products. We shall have to use, for this, a new algorithm, which is defined in sect. 2.5.

It may be said, at this point, that the algebraic results obtained thus far by us extend rather beyond those reported here. We have, for instance, proved Furry's theorem, quite in general, by direct algebraic calculation, as a check on our formalism; also, we have reduced our final formula (34) to yield only the contributions of all inequivalent Feynman graphs, each only once and with the appropriate sign and weight. We forego, however, entering here into such details, due to their limited interest and to the quite cumbersome developments necessary for their derivation.

Part 2 deals exclusively with such algebra as is strictly needed for our present purposes; the problem is stated and solved for the electromagnetic contribution in Part 3; the electron-positron field is studied in Part 4, and there we also give the final results. Finally, we extend in the Appendix to $U(t, t_0)$ the results obtained in the text for $S(\infty)$.

2. — Algebraic Preliminaries.

2.1. — It is most important, in a work of this sort, to pay particular attention to the notation; this should render writing as simple as possible, while exhibiting the relevant features of the expressions to be considered. Thus, we shall encounter throughout expressions such as $\frac{1}{2}[S^F(x_h - x_k)\gamma^{\mu_k}]_{\beta_h\beta_k}$, etc.: the only thing which matters, for us, is the behaviour of this quantity with respect to permutations of the indices h and k : we denote it, briefly, with (hk) ; and so on. Likewise, determinants, pfaffians and the other quantities introduced below are indicated, whenever convenient, with an abbreviated notation. By doing so we achieve also the advantage of giving our formulae a greater generality than would be surmised from the special problem to which we restrict here ourselves: the theory of the Dyson S -matrix, which we consider only in the absence of external fields, applies as well if such fields are present; one has

only to read (hk) , say, as $\frac{1}{2}[\mathcal{S}^F(x_h, x_k)\gamma^{\mu k}]_{\beta_h\beta_k}$, to get the corresponding formula from our results. Also, as is shown in the Appendix, the formula for $U(t, t_0)$ is again essentially the same.

In the remaining sections of this Part we define the notation and the algebraic quantities which occur in our discussion.

2.2. Determinants. — We denote the determinant whose elements are the symbols (hk) with

$$(1) \quad \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & \dots & h_n \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} (h_1 k_1) & (h_1 k_2) & \dots & (h_1 k_n) \\ (h_2 k_1) & (h_2 k_2) & \dots & (h_2 k_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (h_n k_1) & (h_n k_2) & \dots & (h_n k_n) \end{vmatrix}$$

This is Sylvester's classical notation, for $(hk) = a_{hk}$. No ambiguity may occur, although in general $(hk) \neq (kh)$, since the row index of an element, which comes from the first row of our symbol, must always precede the column index (from the second row).

The antisymmetrized product of N_0 wave functions $u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(N_0)}$ (omitting the indices which specify their components) is denoted with

$$(2) \quad \begin{pmatrix} u^{(1)} & u^{(2)} & \dots & u^{(N_0)} \\ 1 & 2 & \dots & N_0 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} u^{(1)}(x_1) & u^{(1)}(x_2) & \dots & u^{(1)}(x_{N_0}) \\ u^{(2)}(x_1) & u^{(2)}(x_2) & \dots & u^{(2)}(x_{N_0}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u^{(N_0)}(x_1) & u^{(N_0)}(x_2) & \dots & u^{(N_0)}(x_{N_0}) \end{vmatrix}.$$

(2) is a particular case of (1), when $(u^{(h)}k) = u^{(h)}(x_k)$. Similar devices are used whenever convenient.

2.3. Permanents. — A « permanent » ⁽⁴⁾ is quite similar to a determinant, the only difference being that each terms of its development is taken with the + sign. Only some of the theorems of determinant theory, of course, are valid for permanents; some either do not hold at all (such as that on the product) or require obvious modifications. We cannot enter here into such questions; the only permanent of interest to us is that defining the symmetrized product of P_0 wave functions; we denote it, in analogy with (2), with the symbol

$$(3) \quad \begin{bmatrix} \mathcal{Z}^{(1)} & \mathcal{Z}^{(2)} & \dots & \mathcal{Z}^{(P_0)} \\ 1 & 2 & \dots & P_0 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \mathcal{Z}^{(1)}(x_1) & \mathcal{Z}^{(1)}(x_2) & \dots & \mathcal{Z}^{(1)}(x_{P_0}) \\ \mathcal{Z}^{(2)}(x_1) & \mathcal{Z}^{(2)}(x_2) & \dots & \mathcal{Z}^{(2)}(x_{P_0}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathcal{Z}^{(P_0)}(x_1) & \mathcal{Z}^{(P_0)}(x_2) & \dots & \mathcal{Z}^{(P_0)}(x_{P_0}) \end{vmatrix} +$$

⁽⁴⁾ D. LITTLEWOOD: *The Theory of Group Characters* (Oxford, 1950).

Here too, one may introduce the simbol $[z^{(h)}k] = z^{(h)}(c_k)$ and obtain (3) as a particular case of the analogue of (1), which we forego writing. Square brackets are used, consistently, for elements of symbols, and the symbols themselves, which are expanded with a « + sign » rule. Round brackets (eventually with a prime) otherwise.

2.4. *Pfaffians* - The pfaffian algorithm, well known since a long time, has been applied in A to questions of quantum physics. Its appearance, of course, is not accidental, but stems from its close connection with the symplectic group, which characterizes quantities obeying anticommutation rules. This remark, indeed, has been the starting point of our present considerations, as it provided the « missing link » in the determination of the symmetry properties of the algebra of ordered products of operators.

A pfaffian is defined by a symbol, or a triangular array, which is expanded according to the rule:

$$(4) \quad (1 \ 2 \dots 2n) =$$

$$= \begin{array}{ccccccc} (1 \ 2) & (1 \ 3) & \dots & (1, & 2n) \\ & (2 \ 3) & \dots & (2, & 2n) \\ & & & & \vdots \\ & & & & (2n-1, \ 2n) \end{array} \Big| = \sum' (-1)^P (i_1 i_2) (i_3 i_4) \dots (i_{2n-1} i_{2n}).$$

\sum' means here, and throughout in the following, summation over all the permutations i_1, i_2, \dots, i_{2n} of $1, 2, \dots, 2n$ which satisfy the limitations

$$i_1 < i_2, \quad i_3 < i_4, \quad \dots, \quad i_{2n-1} < i_{2n},$$

$$i_1 < i_3 < i_5 < \dots < i_{2n-1}.$$

A pfaffian (in analogy with a determinant) can be expanded by the elements of one of its lines: « line h » is that, in the triangular array, which contains all the elements carrying the index h , regardless of whether h is the first or the second index. The element (hk) belongs to the lines h and k ; crossing these lines out, what is left is a new pfaffian, the « minor » of (hk) . The rule for the expansion is then: « A pfaffian is equal to the sum of the products of each element (hk) of a prefixed line by its minor, each term in the sum being given the sign $(-1)^{h+k+1}$. » Many other remarkable properties characterize pfaffians, on which we do not insist here.

It is well, to avoid possible misunderstandings, to remark explicitly that the symbols used here to denote the elements of a pfaffian have nothing to do with the *particular* definition given them in A: for us, indeed, $(hk) \neq (kh)$,

while in A we had $(hk) = (kh)$. However, the fundamental relation (A.12)

$$(1 \ 2 \ \dots \ 2n)^2 = \det. \|a_{hk}\|$$

remains true here too, when the elements of the (antisymmetric) determinant $\det. \|a_{hk}\|$ are defined by means of the relations

$$(5) \quad a_{hk} = 0 \quad \text{for } h = k; \quad a_{hk} = (hk) \quad \text{for } h < k; \quad a_{hk} = -(kh) \quad \text{for } h > k$$

instead of (A.10).

2.5. *A new algorithm.* - To complete the set of algebraic tools needed in this work we have to introduce an algorithm of which we were unable to find trace in the mathematical literature. It is related to pfaffians as permanents are to determinants, and appears to be the «natural» computational tool in the algebra of operators obeying commutation laws. We use for it, in analogy with the symbolism introduced in sects 3 and 4, the notation:

$$(6) \quad [1 \ 2 \ \dots \ 2n] = \begin{vmatrix} [1 \ 2] & [1 \ 3] & \dots & [1, & 2n] \\ & [2 \ 3] & \dots & [2, & 2n] \\ & & & \vdots & \\ & & & [2n-1, & 2n] \end{vmatrix} +$$

In particular, what was said on the expansion of pfaffians by the elements of a line holds also in this case, save for the sign which is always +. We need a name for it: we call it «hafnian», a choice which seems convenient for its assonance with the name of the similar pfaffian algorithm, and is suggested by the memory of our pleasant association with the place where its consideration first occurred to us.

It would be quite interesting, and probably useful, to have a complete and systematic treatment of the relations among pfaffians, hafnians, determinants and permanents. This lies beyond our present scope; we confine ourselves, here, to stating without proof two theorems which emphasize both the analogies and the differences between pfaffians and hafnians:

«A symmetric permanent of even order with vanishing elements in the leading diagonal (the analogue, that is, of an antisymmetric determinant) is the exact square of the hafnian formed by the elements lying above the leading diagonal».

« $[1, 2, \dots, 2n] = P[1, 2, \dots, 2n]$, where P denotes any permutation of the indices $1, 2, \dots, 2n$, provided $[hk] = [kh]$ ».

3. - Calculation of an Element of the S -Matrix: Electromagnetic Field.

3.1. - Since we are concerned exclusively with algebraic developments, we avoid any explicit consideration of such questions as the introduction of convergence factors, limiting processes and the like; this simplifies considerably our formulae, while no trouble ensues for the reader who wishes to modify the final results so to take these points into account. We work throughout in configuration space and use the interaction representation; we need not, and do not, restrict the initial and final particle states to plane waves.

We are interested in the element M_{FI} of the S -matrix which describes the process in which

n electrons, m positrons, a photons

are destroyed and

p electrons, q positrons, b photons

are created, in states specified by some prescribed wave functions; on these we make, for simplicity sake, the hypothesis that all states are orthogonal to one another. Clearly, $n+q=m+p$; we call N_0 this number, and set $P_0 = a+b$. The structure of our formulae depends essentially only upon N_0 and P_0 . If Ψ_I and Ψ_F are the initial and final state vectors of the system, we have ($\hbar = c = 1$):

$$(7) \quad M_{FI} = \sum_N M_{FI}^{(N)} = \sum_N \frac{e^N}{N!} \int \sum \left\langle \Psi_F \left| T \left(\prod_{i=1}^N \bar{\psi}_{\alpha_i}(x_i) \psi_{\beta_i}(x_i) A_{\mu_i}(x_i) \gamma_{\alpha_i \beta_i}^{\mu_i} \right) \right| \Psi_I \right\rangle.$$

(the sign of e is of course irrelevant). In (7), the integration and summation symbols operate upon all written variables and indices; T denotes Wick's chronologically ordered product. We use Wick's theorem and notations for T and N products. Since, in our case, the operators of the boson field commute freely with those of the fermion field and contractions between fields of different statistics vanish identically, we can split our problem into two separate problems, one for each type of field (this justifies the remark made in the Introduction on the immediate generalizability of our results to any type of interaction, provided use is made of the interaction representation). This requires an obvious decomposition of Ψ_I and Ψ_F into the Kronecker products of vectors which describe separately the fermion and the boson part of the field (denoted, respectively with, the labels f and b).

3.2. *Electromagnetic field.* — Let:

$$(8) \quad \begin{cases} |\Psi_I^{(b)}\rangle = a_a^* \dots a_2^* a_1^* |0\rangle, \\ |\Psi_F^{(b)}\rangle = a_b^* \dots a_2^* a_1^* |0\rangle. \end{cases}$$

(8) describes the initial and final situations, with respectively a and b photons, in states $1, 2, \dots, a$ and $1', 2', \dots, b'$, created by the operators a^* acting on the vacuum state $|0\rangle$. Writing will be simplified by using the same symbols z to denote both destroyed and created photons, leaving to their labels the task of specifying the case of each particle. Thus $z_{\mu_k}^{(h)}(x_k)$ will denote the wave function of a photon of state specified by the index h_k which is destroyed at point x_k , if $h \leq a$; or the c.c. of the wave function of a photon created at x_k , if $a < h \leq P_0$. Call, for short, Π the product $A_{\mu_1}(x_1)A_{\mu_2}(x_2) \dots A_{\mu_N}(x_N)$; Wick's theorem states that

$$(9) \quad T(\Pi) = : \Pi : + \sum : \Pi^{(2h)} : + \sum : \Pi^{(4)} : + \dots,$$

where $\Pi^{(2h)}$ denotes any of the values Π assumes when h pairs of operators are contracted, and $\sum \Pi^{(2h)}$ denotes summation over all such values, for given h . Following Wick, the colons denote that all «free» operators (i.e. those which are not contracted) are to be split into their destruction and creation parts and then the products of these written in normal form (i.e. with all creation operators at the left). It is then immediately seen that, as is well known, the only term of the expansion (9) which contributes to the boson part of $M_{FI}^{(N)}$ is $\sum : \Pi^{(2Q)} :$, having set $N = P_0 + 2Q$:

$$(10) \quad \langle \Psi_F^{(b)} | T(\Pi) \Psi_I^{(b)} \rangle = \sum \langle \Psi_F^{(b)} | : \Pi^{(2Q)} : | \Psi_I^{(b)} \rangle.$$

$(M_{FI}^{(N)} \neq 0$ only if N and P_0 have the same parity). Let i denote the operator $A_{\mu_i}(x_i)$; consider the $\binom{N}{2Q}$ combinations C_{2Q} , each of which is obtained by separating $2Q$ operators h_1, h_2, \dots, h_{2Q} ($h_1 < h_2 < \dots < h_{2Q}$) from the remaining P_0 operators j_1, j_2, \dots, j_{P_0} ; then, clearly:

$$(11) \quad \langle \Psi_F^{(b)} | T(\Pi) | \Psi_I^{(b)} \rangle = \sum_{C_{2Q}} (\sum' [i_1 i_2] \dots [i_{2Q-1} i_{2Q}]) \langle \Psi_F^{(b)} | : j_1 j_2 \dots j_{P_0} : | \Psi_I^{(b)} \rangle,$$

where $[hk]$ is the value of the contraction between the operators $A_{\mu_h}(x_h)$ and $A_{\mu_k}(x_k)$ (chronological ordering):

$$(12) \quad [hk] = \frac{1}{2} \delta_{\mu_h \mu_k} D^F(x_h - x_k);$$

\sum' has been defined in Part 2, i_1, i_2, \dots, i_{2Q} are permutations of the indices

h_1, h_2, \dots, h_{2Q} fulfilling the limitations implied in the definition of Σ' . Introducing the hafnians defined in 2.5 we can write (12) as:

$$(13) \quad \langle \Psi_F^{(b)} | T(\Pi) | \Psi_I^{(b)} \rangle = \sum_{\sigma_{2Q}} [h_1 h_2 \dots h_{2Q}] \langle \Psi_F^{(b)} | : j_1 j_2 \dots j_{P_0} : | \Psi_I^{(b)} \rangle.$$

Clearly, the last expectation values reduce to the permanent

$$\begin{bmatrix} z^{(1)} & z^{(2)} & \dots & z^{(P_0)} \\ j_1 & j_2 & \dots & j_{P_0} \end{bmatrix}$$

of the wave functions of the initial and final photons, which appear thus duly antisymmetrized: a well known consequence of the formalism. Also their indices are correctly specified, by defining the symbols $[z^{(h)}k]$ as

$$[z^{(h)}k] = [kz^{(h)}] = z_{\mu_k}^{(h)}(x_k).$$

Finally, we prove a theorem which permits to re-write (13) as a single hafnian, exhibiting thus at once all its symmetry properties as a consequence of the last theorem stated in Part 2:

Theorem: « The expression (13) is the expansion of the hafnian of order $N+P_0$ (even!):

$$(14) \quad [12 \dots N z^{(1)} z^{(2)} \dots z^{(P_0)}] =$$

$$\begin{vmatrix} [1 \ 2] [1 \ 3] \dots [1 \ N] & [1 \ z^{(1)}] & [1 \ z^{(2)}] \dots & [1 \ z^{(P_0)}] \\ [2 \ 3] \dots [2 \ N] & [2 \ z^{(1)}] & [2 \ z^{(2)}] \dots & [2 \ z^{(P_0)}] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ [N-1, N] [N-1, z^{(1)}] [N-1, z^{(2)}] \dots [N-1, z^{(P_0)}] \\ [N \ z^{(1)}] & [N \ z^{(2)}] \dots & [N \ z^{(P_0)}] \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} +$$

with $[z^{(h)} z^{(k)}] = 0$.

Proof. This statement can be proved in several ways, the simplest of which is perhaps to proceed in two steps:

a) to verify that each term of (14) coincides with a term of (13), no two terms being equal; this is apparent on inspection, having regard to the structure of (14) and to the rules given in sect. 2.5 for the expansion of a hafnian by the minors of one of its lines;

b) to verify that the expansion of (14) yields exactly as many terms as the expansion of (13), the last being, clearly, in number of

$$\binom{N}{2Q} P_0! (2Q-1)!! = \frac{N!}{(N-P_0)!!}.$$

Let H_{NP_0} denote the number of terms of a hafnian such as (14), with structure determined by the values of N, P_0 . On expanding it by the elements of its first line one easily finds, from inspection of the structures of their minors, the equation

$$H_{NP_0} = (N-1)H_{N-2, P_0} + P_0 H_{N-1, P_0-1},$$

which is readily solved by taking $N_{NP_0} = N!/(N-P_0)!!$; q.e.d.

The connection with the graph technique becomes apparent by observing that the terms of the expansion of (14) correspond to all, and only, the contributions one would obtain by drawing in all possible manners, for N fixed vertices, Q internal and P_0 external photon lines.

4. - (Continued): Electron-Positron Field.

4.1. - Denote the product of the operators of the fermion field with

$$(15) \quad P = 123 \dots 2N = \bar{\psi}_{\alpha_f}(x_1) \psi_{\beta_1}(x_1) \dots \psi_{\beta_N}(x_N),$$

where $h = 2(h) - 1$ stands for the operator $\bar{\psi}_{\alpha_{(h)}}(x_{(h)})$, $h = 2(h)$ for $\psi_{\beta_{(h)}}(x_{(h)})$ ($(h) = 1, 2, \dots, N$). We denote with (α) the maximum integer contained in $(\alpha+1)/2$ (usual notation: $[(\alpha+1)/2]$: $(\alpha) = \frac{1}{2}[\alpha + \frac{1}{2}(1 - (-1)^\alpha)]$).

Wick's theorem states that

$$(16) \quad T(P) = :P: + \sum :P^{(2)}: + \sum :P^{(4)}: + \dots,$$

where the symbols ∇_λ have the same meaning as in Part 2. Let

$$(17) \quad \begin{cases} \Psi_I^{(i)} = b_m^* \dots b_1^* a_n^* \dots a_1^* |0\rangle, \\ \Psi_F^{(j)} = b_{q'}^* \dots b_1^* a_{p'}^* \dots a_1^* |0\rangle, \end{cases}$$

denote the state vectors which describe the initial and final situation of the fermion field; a^* (b^*) are the operators which create electrons (positrons) in the states specified by their labels.

If one is interested in the calculation of M_{FI} for a given process, its phase

is quite irrelevant; this is not the case if one requires the knowledge of all the matrix elements of S , say to evaluate some $f(S)$, and it happens (as it does) that the phase of M_F is not simply a difference $\varphi(I) - \varphi(F)$. We adopt, therefore, an ordering of all the $\Psi^{(F)}$ such as typified by (17) and determine the phase of M_F with respect to it.

Proceeding exactly as in Part 3, one sees immediately that the contribution of the fermion field is given by

$$(18) \quad \sum (\sum' (-1)^p (i_1 i_2)' \dots (i_{2M-1} i_{2M})') \langle \Psi_F^{(G)} | : j_1 j_2 \dots j_{2N_0} : | \Psi_I^{(F)} \rangle,$$

where: $N = N_0 + M$; $(hk)'$ denotes the contraction between the operators h and k (we use, below, primes also for pfaffian and determinant symbols: this only means that the elements of their arrays are primed symbols; we do so to simplify things in the final results and to avoid the introduction of a too heterogeneous notation): p is the parity of the permutation

$$i_1 i_2 \dots i_{2M} j_1 j_2 \dots j_{2N_0}$$

with respect to the natural order $1, 2, \dots, 2N$. One sees easily that p reduces to the parity p_i of $i_1 i_2 \dots i_{2M}$ with respect to the natural order $h_1 < h_2 < \dots < h_{2N}$ of them in $1, 2, \dots, 2N$. Indeed,

$$p = p_i + p_j + p_{ij},$$

where p_j , parity of $j_1 j_2 \dots j_{2N_0}$ with respect to their natural ordering, is $= 0$ since this ordering is not changed, and p_{ij} = number of inversions of $h_1 h_2 \dots h_{2M}$ with $j_1 j_2 \dots j_{2N_0}$ is given by:

$$p_{ij} = (h_1 - 1) + (h_2 - 2) + \dots + (h_{2M} - 2M) = \sum_{k=1}^{2M} h_k - \binom{2M+1}{2}.$$

But (see below) the only terms $\neq 0$ of (18) come from combinations having M even and M odd indices h : it follows that p_{ij} is even: q.e.d. Formula (18) becomes, thus:

$$(19) \quad \sum_{C_{2M}} (h_1 h_2 \dots h_{2M})' \langle \Psi_F^{(G)} | : j_1 j_2 \dots j_{2N_0} : | \Psi_I^{(F)} \rangle.$$

This formula, which is the exact counterpart of (13), shows clearly the connections between hafnians and Bose statistics, pfaffians and Fermi statistics. We proceed now to the most tedious part of our task, the further simplification of (19); this requires that we study separately the pfaffians and the expectation value of normal products which appear in each term of (19).

4.2. *Evaluation of $(h_1 h_2 \dots h_{2M})'$.* - It is easily seen that the contraction symbols assume, for chronologically ordered products, the values:

$$(20) \quad \begin{cases} (hk)' = 0 & \text{for } h, k \text{ both even or both odd} \\ (hk)' = \frac{1}{2} S_{\beta_{(k)}^F \alpha_{(h)}}^F (x_{(k)} - x_{(h)}) & \text{for } h \text{ odd, } k \text{ even} \\ (hk)' = \frac{1}{2} S_{\beta_{(h)}^F \alpha_{(k)}}^F (x_{(h)} - x_{(k)}) & \text{for } h \text{ even, } k \text{ odd,} \end{cases}$$

with $S^F = (\gamma^\mu \delta_\mu - m) \Delta^F$.

The first of the relations (20) permits to reduce $(h_1 h_2 \dots h_{2M})'$ to a much simpler form. The only terms $\neq 0$ in its expansion are those in which each $(hk)'$ contains one odd and one even index. We can thus split $h_1 h_2 \dots h_{2M}$ into two sets:

$$\begin{aligned} k'_1 k'_2 \dots k'_M, & \quad \text{containing all the odd indices,} \\ h'_1 h'_2 \dots h'_M, & \quad \text{containing all the even indices;} \end{aligned}$$

we label them according to their natural sequence in $h_1 h_2 \dots h_{2M}$, so that $k'_1 < k'_2 < \dots < k'_M$, $h'_1 < h'_2 < \dots < h'_M$. Remembering the observations at the end of sect. 2.4 (formula (5)) and formula (14) of A, we set

$$\begin{aligned} a_{hk} &= 0 & \text{for } h = k, \\ a_{hk} &= (kh)' & \text{for } h > k, \\ a_{hk} &= -(hk)' & \text{for } h < k, \end{aligned}$$

so to have:

$$(21) \quad (h_1 h_2 \dots h_{2M})' = \frac{1}{(2M)!!} \sum (-1)^p a_{i_1 i_2} a_{i_3 i_4} \dots a_{i_{2M-1} i_{2M}},$$

the summation being extended to all permutations of the indices (of parity p). (21) contains $2^M (M!)^2$ terms $\neq 0$. We prescribe now that $i_1 i_2 \dots i_{2M-1}$ be given by $k'_1 k'_2 k'_3 \dots k'_M$ in their natural order, so that i_2, i_4, \dots, i_{2M} are a permutation of h'_1, h'_2, \dots, h'_M . This eliminates again the factor $1/(2M)!!$ and yields:

$$(22) \quad (h_1 h_2 \dots h_{2M})' = \sum (-1)^p a_{k'_1 i_2} a_{k'_2 i_4} \dots a_{k'_M i_{2M}};$$

the sum is now over all the $M!$ permutations of $h'_1 h'_2 \dots h'_M$ and p is the parity of $k'_1 i_2 k'_2 i_4 \dots k'_M i_{2M}$ with respect to $h_1 h_2 \dots h_{2M}$. Call τ' the parity with respect

to $h_1 h_2 \dots h_{2M}$ of $k'_1 k'_2 \dots k'_M h'_1 h'_2 \dots h'_M$ (that is, with all odd indices shifted to the left); if p' is the parity of $i_2 i_4 \dots i_{2M}$ with respect to $h'_1 h'_2 \dots h'_M$, p is given by

$$p = \tau' + \sum_{s=1}^{M-1} (M-s) + p' = \tau' + \binom{M}{2} + p',$$

so that

$$(23) \quad (h_1 h_2 \dots h_{2M})' = (-1)^{\binom{M}{2} + \tau'} \begin{vmatrix} a_{k'_1 h'_1} & a_{k'_1 h'_2} & \dots & a_{k'_1 h'_M} \\ a_{k'_2 h'_1} & a_{k'_2 h'_2} & \dots & a_{k'_2 h'_M} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k'_M h'_1} & a_{k'_M h'_2} & \dots & a_{k'_M h'_M} \end{vmatrix}.$$

The same result follows, of course, from formula (A.17), after a suitable generalization.

4.3. *Evaluation of $\langle \Psi_F^{(j)} : j_1 j_2 \dots j_{2N_0} : \Psi_F^{(j)} \rangle$.* - Clearly, there are N_0 odd and N_0 even indices j . To analyse this expression we write

$$(24) \quad J = : j_1 j_2 \dots j_{2N_0} : = : \prod_{h=1}^{2N_0} \left(u^{(-)^{j_h}} (x_{(j_h)}) + v^{(-)^{j_h+1}} (x_{(j_h)}) \right) :$$

where

$$\begin{aligned} u^+ &\equiv u & (u^- &\equiv \bar{u}) & \text{destroys (creates) electrons,} \\ v^+ &\equiv v & (v^- &\equiv \bar{v}) & \text{» » » positrons.} \end{aligned}$$

We are only interested in the products contained in expansion of J which destroy m positrons, destroy n electrons, create p electrons, create q positrons. To get the sign straight, we permute the factors of J so to arrive at the « standard ordering »

$$J' = : h''_1 h''_2 \dots h''_q k''_1 k''_2 \dots k''_p h''_{q+1} h''_{q+2} \dots h''_{N_0} k''_{p+1} k''_{p+2} \dots k''_{N_0} :$$

where

$$\begin{aligned} h''_1 h''_2 \dots h''_{N_0} & \text{ are the even } j \text{ in their natural sequence} \\ k''_1 k''_2 \dots k''_{N_0} & \text{ » » odd } j \text{ » » » » } \end{aligned}$$

Thus, $J = (-1)^{p_{JJ'}} J'$, $p_{JJ'}$ being the parity of the permutation which leads from J to J' . The advantage of introducing J' lies in the fact that the expansion of $\langle \Psi_F^{(j)} : J' | \Psi_F^{(j)} \rangle$ contains a term which, as is seen on inspection from (24) and the definition of J' , has certainly a positive sign, since no anti-commutations intervene in its evaluation. Denoting with $u^{(k)}$ ($v^{(k)}$) the wave

function of the electron (positron) in state k , this term is:

$$\bar{v}_{\beta(h_1)}^{(a')} (x_{(h_1)}) \dots \bar{v}_{\beta(h_q)}^{(1')} (x_{(h_q)}) \cdot \bar{v}_{\alpha(k_1)}^{(p')} (x_{(k_1)}) \dots \bar{v}_{\alpha(k_p)}^{(1')} (x_{(k_p)}) \cdot \\ \cdot v_{\alpha(k_{N_0}')}^{(m)} (x_{(k_{N_0}')}') \dots v_{\alpha(k_{p+1}')}^{(1)} (x_{(k_{p+1}')}') \cdot u_{\beta(h_{N_0}')}^{(n)} (x_{(h_{N_0}')}') \dots u_{\beta(h_{q+1}')}^{(1)} (x_{(h_{q+1}')}') \cdot$$

There is no trouble then in seeing that

$$(25) \quad \langle \Psi_F^{(f)} | J | \Psi_F^{(f)} \rangle = (-1)^{p_{JJ'}} \left(\bar{u}^{(p')} \dots \bar{u}^{(1')} v^{(1)} \dots v^{(m)} \right)' \left(\bar{v}^{(q')} \dots \bar{v}^{(1')} u^{(1)} \dots u^{(n)} \right)',$$

$$\left(k_1'' \dots k_p'' k_{p+1}'' \dots k_{N_0}'' \right) \left(h_1'' \dots h_q'' h_{q+1}'' \dots h_{N_0}'' \right),$$

where we use the abbreviated notation defined in sect. 2.2, and $(u^{(i)} \lambda)' = u_{\beta(\lambda)}^{(i)}$, etc., in an obvious manner.

To evaluate $p_{JJ'}$, call τ'' the parity with respect to $j_1 j_2 \dots j_{2N_0}$ of $k_1'' \dots k_{N_0}'' h_1'' \dots h_{N_0}''$ (that is, with all odd indices shifted to the left, in their natural sequence); this ordering becomes that of J' after $pq + mN_0$ transpositions, so that $p_{JJ'} = \tau'' + pq + mN_0$. To get a more compact notation, we write

$$\bar{v}^{(1')} = u^{(n+1)}, \dots, \bar{v}^{(q')} = u^{(N_0)}; \quad \bar{u}^{(1')} = v^{(m+1)}, \dots, \bar{u}^{(p')} = v^{(N_0)},$$

so that, taking due care of the signs, (25) becomes:

$$(26) \quad \langle \Psi_F^{(f)} | J | \Psi_F^{(f)} \rangle = (-1)^{e+\tau''} \left(v^{(1)} v^{(2)} \dots v^{(N_0)} \right)' \left(u^{(1)} u^{(2)} \dots u^{(N_0)} \right)',$$

$$\left(k_1'' k_2'' \dots k_{N_0}'' \right) \left(h_1'' h_2'' \dots h_{N_0}'' \right),$$

where $e = pq + mN_0 + \binom{q}{2} + nq + \binom{p}{2} + mp$; k'' (h'') are the odd (even) indices in the order in which they appear in J , and

$$(27) \quad \begin{cases} (v^{(\lambda)} k'')' = (k'' v^{(\lambda)})' = v_{\alpha(k'')}^{(\lambda)} (x_{(k'')}), \\ (u^{(\lambda)} h'')' = (h'' u^{(\lambda)})' = u_{\beta(h'')}^{(\lambda)} (x_{(h'')}). \end{cases}$$

4.4. - Collecting our results we get, from (23) and (26):

$$(28) \quad \langle \Psi_F^{(f)} | T(P) | \Psi_F^{(f)} \rangle =$$

$$= (-1)^{e+\binom{M}{2}} \sum_{c_{2M}} (-1)^{\tau'+\tau''} \begin{vmatrix} a_{k_1' h_1'} & \dots & a_{k_1' h_M'} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k_M' h_1'} & \dots & a_{k_M' h_M'} \end{vmatrix} \left(v^{(1)} \dots v^{(N_0)} \right) \left(u^{(1)} \dots u^{(N_0)} \right).$$

$$\left(k_1'' \dots k_{N_0}'' \right) \left(h_1'' \dots h_{N_0}'' \right).$$

The sum is over all the $\binom{N}{M}^2$ combinations of 1, 2, ..., 2N such that all h 's

are odd, all h 's even; $\tau' + \tau''$ is the parity of the permutation

$$(29) \quad k'_1 k'_2 \dots k'_M h'_1 h'_2 \dots h'_M k''_1 k''_2 \dots k''_M h''_1 h''_2 \dots h''_M$$

(see discussion after formula (8): $p_{ij} = 0$).

Consider now the determinant of order $N + N_0$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} & \dots & a_{1,2N} & (1 \quad v^{(1)})' & \dots & (1 \quad v^{(N_0)})' \\ a_{32} & a_{34} & \dots & a_{3,2N} & (3 \quad v^{(1)})' & \dots & (3 \quad v^{(N_0)})' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2N-1,2} & a_{2N-1,4} & \dots & a_{2N-1,2N} & (2N-1, v^{(1)})' & \dots & (2N-1, v^{(N_0)})' \\ (u^{(1)2})' & (u^{(1)4})' & \dots & (u^{(1)}, 2N)' & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (u^{(N_0)2})' & (u^{(N_0)4})' & \dots & (u^{(N_0)}, 2N)' & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

It is readily seen that, to within the sign, each term of Δ coincides with a term of (38) and that the total number of terms is the same in both cases. Expanding Δ by the minors of its last N_0 rows, and then the adjoint of each such minor by the minors of its last N_0 columns, one gets a sum of products of determinants like (28), save that now the sign of the running term is given by $(-1)^\sigma$ with

$$\sigma = (N+1) + \dots + (N+N_0) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_0} h''_i + (M+1) + \dots + N + \\ + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_0} (k''_i + 1) \approx \frac{3}{2} N_0 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2N_0} j_i.$$

On the other hand, (29) is obtained from the natural ordering 1, 2, ..., 2N through the following steps:

a) change 1, 2, ..., 2N into 1, 3, ..., 2N-1, 2, 4, ..., 2N: parity change = $\binom{N}{2}$;

b) change the latter into $k'_1 \dots k'_M k''_1 \dots k''_{N_0} h'_1 \dots h'_M h''_1 \dots h''_{N_0}$: parity change given by:

$$\binom{k'_1 + 1}{2} - 1 + \dots + \binom{k'_M + 1}{2} - M + \\ + \binom{h'_1}{2} - 1 + \dots + \binom{h'_M}{2} - M \approx \frac{M}{2} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M (k'_i + h'_i);$$

e) change into (29): parity change = MN_0 . Therefore:

$$\begin{aligned}\tau' + \tau'' + \binom{M}{2} &= \\ &= \sigma + \binom{M}{2} + \binom{N}{2} + \frac{M}{2} + MN_0 + \frac{1}{2} \binom{2N+1}{2} + \frac{3}{2} N_0 \approx \sigma + \binom{N_0+1}{2},\end{aligned}$$

and finally:

$$(30) \quad \langle \Psi_F^{(f)} | T(P) | \Psi_I^{(f)} \rangle = (-1)^{p_{FI}} \Delta,$$

with

$$P_{FI} = q + \binom{N_0+1}{2} \approx p(m+n) + \left[\binom{n}{2} - \binom{p}{2} \right].$$

It will be noticed that this gives also the sign for the inverse process (matrix element M_{IF}), as is seen after a trivial computation; also, that p_{FI} depends upon n, m, p, q in such a manner that is not amenable to the form $\varphi(I) - \varphi(E)$.

4.5. — Let us now give Δ its explicit form. From (20) and (27), remembering the definition of a_{hk} , we find

$$(31) \quad \Delta = \begin{vmatrix} (11)' & \frac{1}{2} S_{\beta_1 \alpha_1}^F(x_2 - x_1) & \dots & \frac{1}{2} S_{\beta_N \alpha_1}^F(x_N - x_1) & v_{\alpha_1}^{(1)}(x_1) & \dots & v_{\alpha_1}^{(N_0)}(x_1) \\ \frac{1}{2} S_{\beta_1 \alpha_2}^F(x_1 - x_2) & (22)' & \dots & \frac{1}{2} S_{\beta_N \alpha_2}^F(x_N - x_2) & v_{\alpha_2}^{(1)}(x_2) & \dots & v_{\alpha_2}^{(N_0)}(x_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{2} S_{\beta_1 \alpha_N}^F(x_1 - x_N) & \frac{1}{2} S_{\beta_2 \alpha_N}^F(x_2 - x_N) & \dots & (NN)' & v_{\alpha_N}^{(1)}(x_N) & \dots & v_{\alpha_N}^{(N_0)}(x_N) \\ u_{\beta_1}^{(1)}(x_1) & u_{\beta_2}^{(1)}(x_2) & \dots & u_{\beta_N}^{(1)}(x_N) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{\beta_1}^{(N_0)}(x_1) & u_{\beta_2}^{(N_0)}(x_2) & \dots & u_{\beta_N}^{(N_0)}(x_N) & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

It is at this point convenient to incorporate also the matrices $\gamma_{\alpha\beta}^{\mu}$ and the sums over the indices α into the expression of Δ . We take, for convenience of notation, the transpose of Δ instead of Δ . The result is, in abbreviated notation:

$$(32) \quad \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha N}^{1, \dots, 4} \langle \Psi_F^{(f)} | T(P) | \Psi_I^{(f)} \rangle \gamma_{\alpha_1 \beta_1}^{\mu_1} \dots \gamma_{\alpha_N \beta_N}^{\mu_N} = (-1)^{p_{FI}} \begin{vmatrix} 12 & \dots & N & V^{(1)} V^{(2)} & \dots & V^{(N_0)} \\ 12 & \dots & N & u^{(1)} u^{(2)} & \dots & u^{(N_0)} \end{vmatrix},$$

where:

$$(33) \quad \left\{ \begin{array}{l} (hk) = \frac{1}{2}[S^F(x_h - x_k)\gamma^{\mu_k}]_{\beta_h\beta_k}, \\ (u^{(k)}h) = (h u^{(k)}) = u_{\beta_h}^{(k)}(x_h) \\ (V^{(k)}h) = (h V^{(k)}) = \sum_{\alpha_h=1}^4 v_{\alpha_h}^{(k)}(x_h)\gamma_{\alpha_h\beta_h}^{\mu_h}, \\ (V^{(h)}u^{(k)}) = (u^{(k)}V^{(h)}) = 0. \end{array} \right.$$

The Heisenberg prescription simply amounts, in this formalism, to setting $(hh)' = (hh) = 0$. If there are external fields, however, the symbols (hk) have to be re-defined in an obvious manner, and $(hh) \neq 0$. Formula (32), and so formula (14), still hold.

The connection of formula (32) with the graph technique is again evident: its expansion contains all, and only, the contribution one obtains by drawing in all possible manners, for N fixed vertices, M internal and $2N_0$ external fermion lines. The antisymmetrization of the wave functions of the initial and final states is apparent.

4.6. - Finally, from (7), (14) and (32):

$$(34) \quad M_{FI} = (-1)^{p_{FI}} \sum_{(N=P_0+2Q)} \frac{e^N}{N!} \int \sum \begin{pmatrix} 12 & \dots & NV^{(1)} & \dots & V^{(N_0)} \\ 12 & \dots & Nu^{(1)} & \dots & u^{(N_0)} \end{pmatrix} \cdot [12 \dots Nz^{(1)} \dots z^{(p_0)}].$$

From the structure of (34) we see that the determinant and the hafnian corresponding to the term of order N are simply the principal minors of orders, respectively, $N+N_0$ and $N+P_0$ of a determinant and a hafnian of infinite order. (The determinant is a well known one, in the Fredholm theory: this is more than a coincidence; we shall return on the question in the continuation to this work). The lowest orders may correspond to processes described by « non connected » Feynman graphs, which must, of course, be considered on the same footing as all other terms.

In particular, the vacuum-vacuum transition gives:

$$(35) \quad M_{00} = \sum_{(N=\text{even})} \frac{e^N}{N!} \int \sum \begin{pmatrix} 12 & \dots & N \\ 12 & \dots & N \end{pmatrix} [12 \dots N].$$

We expect that M_{00} , and similar simple expressions, will play an important role in the investigation of deeper questions. Any M_{FI} , in particular, should derive from (35) (written for the case of external sources) by means of suitable variational differentiations.

Clearly, (34) contains, for each order, many identical terms, as is with graphs. As we have said in the Introduction, we forego reporting the formulae

which accomplish its ultimate reduction, because much of its simplicity would be lost, and furthermore one would fall back into the old troubles. We just record here a trivial simplification of (34), which is symmetric enough to deserve perhaps mention:

$$(36) \quad M_{FI} = (-1)^{p_{FI}} \sum_{(N=P_0+2Q)} \frac{e^N}{(N-P_0)!!} \cdot \int \sum \begin{pmatrix} 12 & \dots & N V^{(1)} & \dots & V^{(N_0)} \\ 12 & \dots & N u^{(1)} & \dots & u^{(N_0)} \end{pmatrix} [12][34] \dots [2Q-1, 2Q] \cdot z_{\mu_{2Q+1}}^{(1)}(x_{2Q+1}) \dots z_{\mu_N}^{(P_0)}(x_N).$$

It is clear that formula (34) would yield, on inspection, the exact number of Feynman graphs pertaining to any wanted process (involving orthogonal states) and order — a number whose approximate evaluation has been the object of several investigations. We leave this to the reader.

In conclusion, the author takes pleasure in expressing his sincerest thanks to Prof. P. KRISTENSEN for many interesting and stimulating discussions.

APPENDIX

Formula (34) contains integrals ranging over all space and time values. It is just as easy, however, to obtain $U(t, t_0)$ instead of $S = U(+\infty, -\infty)$: just take t, t_0 rather than $\pm\infty$ as limits in the integrations. It is instructive, however, to abandon the use of chronologically ordered products, and therefore define the contraction symbols as

E.M. Field:

$$(i) \quad [hk] = i\delta_{\mu_h\mu_k} D^+(x_h - x_k).$$

El. Pos. Field:

$$(ii) \quad (hk)' = \begin{cases} -iS_{\beta_{(k)}\alpha_{(h)}}(x_{(k)} - x_{(h)}) & \text{for } h \text{ odd, } k \text{ even,} \\ -iS_{\beta_{(h)}\alpha_{(k)}}(x_{(h)} - x_{(k)}) & \text{for } h \text{ even, } k \text{ odd.} \end{cases}$$

so that (34) becomes:

$$(iii) \quad M_{FI}(t, t_0) = (-1)^{p_{FI}} \cdot$$

$$\sum_{(N=P_0+2Q)} e^N \int_{t_0}^t dx_1 \int_{t_0}^{t_1} dx_2 \dots \int_{t_0}^{t_{N-1}} dx_N \sum \begin{pmatrix} 12 & \dots & N V^{(1)} & \dots & V^{(N_0)} \\ 12 & \dots & N u^{(1)} & \dots & u^{(N_0)} \end{pmatrix} [12 \dots N z^{(1)} \dots z^{(P_0)}],$$

where the only changes with respect to the previous notation are given by (i) and

$$(iv) \quad (hk) = \begin{cases} i[S^+(x_h - x_k)\gamma^{\mu_k}]_{\beta_h\beta_k} & \text{for } h < k, \\ -i[S^-(x_h - x_k)\gamma^{\mu_k}]_{\beta_h\beta_k} & \text{for } h > k. \end{cases}$$

For $t = \infty$ (iii) reduces, of course, to (34), as is seen from the well known relations:

$$\begin{aligned} \Delta^F(x) &= 2i\Delta^+(x) & \text{for } x_0 > 0, \\ \Delta^F(x) &= -2i\Delta^-(x) & \text{for } x_0 < 0. \end{aligned}$$

RIASSUNTO

Si dà una espressione compatta per il termine generico dello sviluppo perturbativo della matrice S di Dyson, per il processo di scattering più generale. Tale sviluppo possiede un alto grado di simmetria, del tutto nascosto dalla tecnica usuale basata sull'uso dei diagrammi di Feynman, che presenta anche vari inconvenienti da cui il nostro metodo è esente. L'espressione trovata per S indica l'esistenza, nella teoria, di più riposte proprietà; queste saranno studiate nel seguito a questo lavoro.

An Analysis of the Electron Pairs Produced in Nuclear Emulsions by Cosmic Rays Photons.

G. BARONI

*Istituto di Fisica dell'Università - Roma
Istituto Nazionale di Fisica Nucleare - Sezione di Roma*

A. BORSELLINO and L. SCARSI

*Istituto di Fisica Teorica dell'Università - Genova
Istituto Nazionale di Fisica Nucleare - Sezione di Milano*

G. VANDERHAEGHE

*Laboratoire de Physique Nucléaire de la Faculté des Sciences Appliquées
Université Libre de Bruxelles*

(ricevuto il 13 Ottobre 1953)

Summary. — A comparison has been made between the theory of electron pair production by photons and experimental data, for energies up to 400 MeV. The following points have been analysed: 1) Energy partition between the two members of the pair; 2) Statistical distribution of the momentum transfer to the pair; 3) Distribution of the angle of divergence of the pair.

1. — Introduction.

In an investigation, with nuclear emulsions, of the soft component of cosmic rays at 2860 meters above sea level ⁽¹⁾, enough data have been collected to enable us to compare the theory of pair production ⁽²⁾ with the experimental results at rather high energies.

⁽¹⁾ G. BARONI, G. CORTINI, A. MILONE, L. SCARSI and G. VANDERHAEGHE: *Nuovo Cimento*, **9**, 867 (1952) Cited below as B.

⁽²⁾ W. HEITLER: *The quantum theory of radiation* (Oxford, 1944).

Verifications of the theory at relatively low energies (1-20 MeV) have been made by many authors and although some points need more discussion, one can say that the theoretical results are more or less in agreement with the experiments. Electron pairs by photons up to 70 MeV have been studied with nuclear emulsions by MCDIARMID⁽³⁾; while DE WIRE and BEACH⁽⁴⁾ investigated, by the pair spectrometer method, the energy distribution of positrons produced by 270 MeV photons.

The comparison will be analysed in the following points:

- a) Energy partition between the two members of the pair.
- b) Statistical distribution of the momentum transfer to the pairs.
- c) Distribution of the angle of divergence of the pair.

As in our case we have no indication of the direction of the generating photons, it is impossible to study the momentum transfer to the nucleus or the angle between either electron and the photon. It is possible however to make the comparison using a) and b) because the knowledge of the direction of the incident photons is not needed in this case.

2. - Energy distribution between the two electrons of the pairs.

We measured the energy distribution of the electrons from 196 pairs observed in our plates. As we are not able to recognise the sign of the charge of the electrons, we are indicating with E_1 the energy of the electron of lower energy and with E_2 the energy of the other electron. The statistical distribution of the pairs has thus been represented as a function of the ratio $E_1/(E_1 + E_2)$, that ranges between 0 and 0.5.

The pairs were divided into two groups:

- a) Pairs with total energy between 5 and 100 MeV.
- b) Pairs with total energy larger than 100 MeV.

The distribution of the pairs as a function of the total energy is given in Table II, reference B; the pairs with an energy larger the 400 MeV are only three. In Fig. 2 we give the hystograms of the two groups a) and b) of pairs; the errors marked are only the statistical standard errors. Fig. 1 shows gra-

(3) I. B. MCDIARMID: *Can. Journ. Phys.*, **30**, 670 (1952).

(4) J. W. DE WIRE and L. BEACH: *Phys. Rev.*, **83**, 476 (1951).

phically the theoretical curves of the cross-section for the production of positrons of energy E_+ by photons of energy $k = (E_+ + E_-)$, evaluated with the formula:

$$(1) \quad \sigma(E_+) = \sigma(E_-) = \frac{\sigma_0}{k^3} \left\{ (E_+^2 + E_-^2) f_1(\gamma) - \frac{4}{3} \ln Z + \right. \\ \left. - \frac{2}{3} E_+ E_- \left[f_2(\gamma) - \frac{4}{3} \ln Z \right] \right\},$$

where $\sigma_0 = z^2 r_0^2 / 137 = 2.6 \cdot 10^{-25} \text{ cm}^2$ for Ilford G.5 photographic emulsion; $\gamma = 100 mc^2 / (E_+ E_- Z^{1/3})$; $f_1(\gamma)$ and $f_2(\gamma)$ are functions known only numerically. Formula (1) was obtained by BETHE and HEITLER⁽⁵⁾ in the Born approximation, taking into account the screening effect.

Each curve of Fig. 1 was obtained by taking the average curves for the different elements which constitute the photographic emulsion.

We plotted the solid lines of Fig. 2 from (1) taking into account the known energy distribution of the pairs of each group. The histograms and the theo-

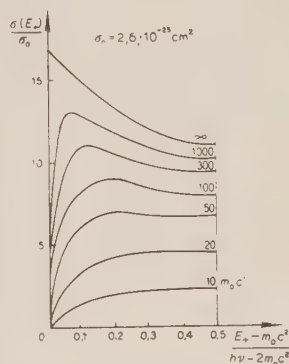


Fig. 1. — Theoretical energy distributions between the two electrons of the pair.

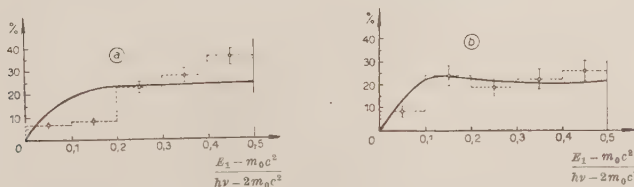


Fig. 2. — Energy distributions between the two electrons of the pairs.
a) $5 \text{ MeV} < (E_1 + E_2) < 100 \text{ MeV}$; b) $(E_1 + E_2) > 100 \text{ MeV}$.

retical curves of Fig. 2 are normalised at the same area. We may point out, finally, that the errors due to the use of Born approximation, are negligible in connection with the energies under study. It can be said that the agreement between the experimental distribution is rather satisfactory for the group b) of the pairs; for the group a) the deviations are clearly larger than the statistical errors, for the pairs with the value E_1/k less than 0.3 were fewer than expected.

A reasonable interpretation for this discrepancy shown by the group with

(5) H. BETHE and W. HEITLER: *Proc. Roy. Soc., A* **146**, 83 (1934).

total energy lower than 100 MeV, is that the pairs with large asymmetry are difficult to observe when one of the electrons has a very small energy. In fact in this case the effect of scattering reduces strongly the probability of finding out the pair: 1) because the scattering pushes rapidly one track away from the other, making ineffective the usual criterium of recognising a pair, based on the convergence of two near tracks; 2) because the slow electron has a great probability to leave the emulsion after a short path and consequently even if we can recognise the pair, we cannot utilise it as it is impossible to measure the energy of the shorter track with an acceptable precision. It is difficult, specially for the first of the two reasons of loss, to make a precise correction.

The drop below 30 MeV in the photonic spectrum (*B*, Fig. 4) can be explained in a similar way; the loss was evaluated as at least 20%. This reasoning becomes plausible when comparing the number of the pairs detected by accurate search with that by a quick one (columns 2 and 3 of Table II in *B*).

A similar drop was pointed out by MCDIARMID⁽³⁾ in the study of pairs produced in plates by a synchrotron spectrum of 70 MeV. In this case too large deficiency was noticed of pairs with an energy below 30 MeV as well as of pairs with large asymmetry. This discrepancy still remains after the correction, made by MCDIARMID according to cause (2) of loss resulting from the scattering; however we cannot evaluate the importance of the effect (1).

We mention the fact that the measures by KOCH and CARTER⁽⁶⁾, with a cloud chamber for energies below 20 MeV, have shown, in the case of asymmetric pairs, a discrepancy in the same direction, but of lower amount, for in a cloud chamber the above mentioned causes of loss for asymmetric pairs are practically ineffectual.

The absence of disagreement for pairs with energy larger than 100 MeV substantiates the arguments given above (in fact the effect of the scattering on the tracks at these energies is much lower) and at the same time is in agreement with the results of DE WIRE and BEACH, obtained with photons of 270 MeV.

3. - Distribution of the momentum transfer to the pairs.

A point of interest in the theory of pair production is the momentum q transferred to the nucleus. The distribution of the modulus q and of the angle between q and the direction of the incident photon was studied in detail, with a cloud chamber, by GROSHEV⁽⁷⁾ at the energy 2.6 MeV and by MODESITT and KOCH⁽⁸⁾ at energies up to 20 MeV. The experimental results of the latter

(6) H. W. KOCH and R. E. CARTER: *Phys. Rev.*, **77**, 165 (1950).

(7) L. V. GROSHEV: *Compt. Rend. USSR*, **26**, 424 (1940).

(8) G. E. MODESITT and H. W. KOCH: *Phys. Rev.*, **77**, 175 (1950).

authors, compared with the theoretical ones obtained by JOST, LUTTINGER and SLOTNICK⁽⁹⁾ in the Born approximation without screening, show a disagreement for large momentum transfers and for small angles. However these experimental results are probably affected by systematic causes of errors⁽¹⁰⁾, hence the significance of the disagreement must be ulteriorly clarified.

As we mentioned in the introduction, in our case we do not know the

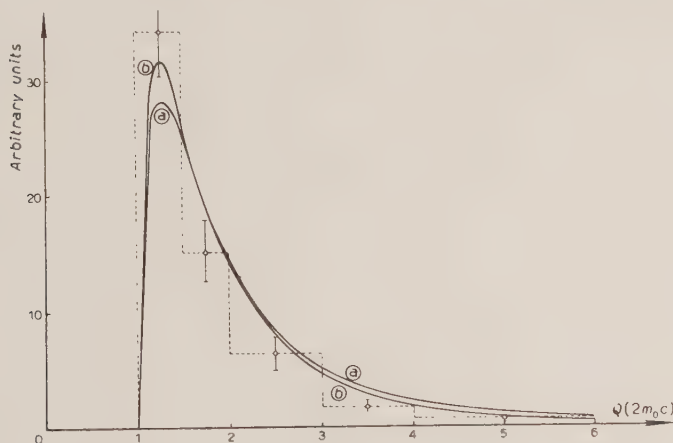


Fig. 3. — Q distribution of the pairs a) with screening; b) without screening.

direction of the incident photon and for this reason it is not possible to measure the total momentum of the pair $P = p_1 + p_2$ to obtain the momentum $q = (k - p)$ transferred to the nucleus. Therefore we shall discuss directly the distribution of P , or even better, as it is more convenient, the distribution of the related quantity $Q = (k^2 - P^2)^{1/2}$, which represents the energy of the pair in the center of mass system of the two electrons. This distribution has been calculated by one of us⁽¹¹⁾ with the Born approximation, taking also into account the screening effect at high energy. If we call ω the angle of divergence of the pair, the value of Q can be obtained from the experimental data with the formula:

$$(2) \quad \begin{aligned} Q^2 &= k^2 - P^2 = (E_1 + E_2)^2 - (p_1 + p_2)^2 \cong \\ &\cong 2m^2c^4 + m^2c^4 \left(\frac{E_1}{E_2} + \frac{E_2}{E_1} \right) \cos \omega + 2E_1E_2(1 - \cos \omega) \cong \frac{m^2c^4k^2}{E_1E_2} + E_1E_2\omega^2. \end{aligned}$$

where $mc^2 = 0.51$ MeV.

⁽⁹⁾ R. JOST, J. M. LUTTINGER and M. SLOTNICK: *Phys. Rev.*, **80**, 189 (1950).

⁽¹⁰⁾ G. E. MODESITT and H. W. KOCH: Private communication.

⁽¹¹⁾ A. BORSELLINO: *Phys. Rev.*, **89**, 1023 (1953).

In Fig. 3 the Q -distribution of the measured pairs is given together with the theoretical distributions. These were obtained taking into account the

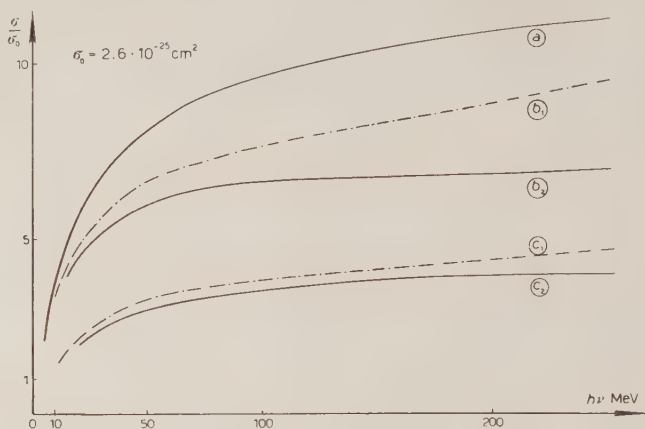


Fig. 4. - Theoretical cross-sections for pair production. a) integral; b_1) $Q=1.25$ (without screening); b_2) $Q=1.25$ (with screening); c_1) $Q=2$ (without screening); c_2) $Q=2$ (with screening).

actual energetic spectrum of the pairs and utilizing both the cross-section without screening and that with complete screening (form. 7, 8, 10, of ref. (11)).

The distributions are normalised at the same total area. The experimental histogram appears a little narrower than both the theoretical curves, but the general shape is substantially in agreement.

Another type of comparison has been made by considering groups of pairs characterised by the same Q , and by tracing back for each group to the generating photonic spectrum. This was done by using the cross-section correspond-

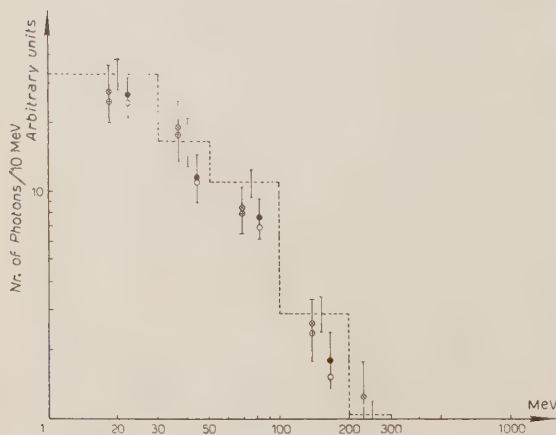


Fig. 5. Energy distribution of photons. + integral; \bullet $1 \leq Q \leq 1.5$ (with screening); \circ $1 \leq Q \leq 1.5$ (without screening); \otimes $1.5 \leq Q \leq 2.5$ (with screening); \oplus $1.5 \leq Q \leq 2.5$ (without screening).

ing to each fixed value of Q . The obtained spectra ought to coincide between them and also with the spectrum obtained by means of the total cross-section from all the pairs. In Fig. 4 we give the theoretical cross-sections for the values of Q equal to 1.25 and 2; in Fig. 5 the spectra obtained from the groups of pairs with a Q value between 1 and 1.5 and with a Q value between 1.5 and 2.5. One can say that the spectra, obtained independently from the different groups coincide between them in the shape as well as in the absolute values. This test is satisfactory from the point of view of the consistency of the experimental data as well as of their theoretical treatment.

4. - Distribution of the angle of divergence of the pairs.

Many authors ^(6,7,12-15) have already compared the previsions of the Bethe-Heitler theory in respect of the angles θ_+ and θ_- between the electrons and the photon or of the angle ω between the two electrons.

The theoretical cross-section for the distribution of the angles θ_+ (or θ_- , as in the Born approximation these angles occur symmetrically) is not completely known. The following formula given by BETHE ⁽¹⁶⁾ was often used for the probability of an angle between θ_+ and $\theta_+ + d\theta_+$:

$$(3) \quad \sigma(\theta_+) d\theta_+ = C \frac{\theta_+ d\theta_+}{(\theta_0^2 + \theta_+^2)^2} \left(\ln \frac{\theta_0^2 + \theta_+^2}{\theta_0^2} + B \right),$$

where $\theta_0 = mc^2/E_+$; B and C are factors not explicitly stated. Instead of (3) there has been also used the formula derived from it leaving out the logarithmic term. We remark that these formulae are valid for small angles, so that one can approximate $\sin \theta$ with θ . Now, while this is always the case at high energies, at low energies we can also have large angles and for this reason the use of (3) is questionable; it seems that this has not been sufficiently noticed by the authors that worked at low energies.

In the conditions in which the results we are discussing have been obtained, the only angle experimentally accessible is the angle ω of divergence between the two members of the pair. If we call ω_0 the angle kmc^2/E_+E_- and x the

⁽¹²⁾ L. SIMONS and K. ZUBER: *Proc. Roy. Soc.*, A **159**, 383 (1937).

⁽¹³⁾ A. Z. HRYNKIEWICZ: *Acta Phys. Pol.*, **10**, 251 (1950).

⁽¹⁴⁾ R. R. ROY: *Proc. Phys. Soc.*, A **62**, 499 (1949).

⁽¹⁵⁾ I. B. MCDIARMID: *Can. Journ. Phys.*, **31**, 337 (1953).

⁽¹⁶⁾ H. BETHE: *Proc. Cam. Soc.*, **30**, 524 (1934).

ratio ω/ω_0 , we have for the cross-section as a function of x ⁽¹¹⁾:

$$(4) \quad d\sigma = 16 \sigma_0 a(1-a) F \frac{x dx}{(1+x^2)^2},$$

where $a = E_+/k$ and F is a function of x and a as given in ⁽¹¹⁾.

In Fig. 6 we represent the x -distribution as evaluated from (4), where $a = 0.5$ and $k = 100$ MeV which corresponds approximately to the average energy of the pairs (in any case the distribution is little sensitive to the

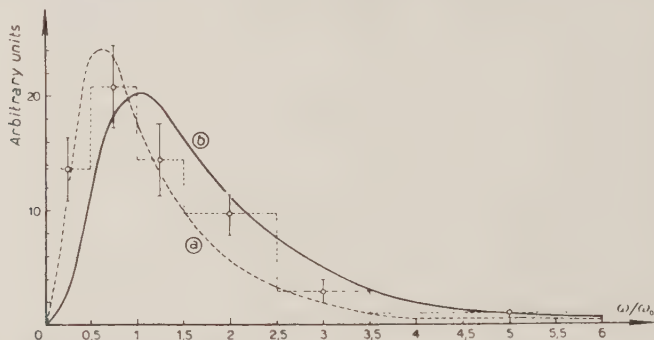


Fig. 6. - Distribution of the angle of divergence ω between the two members of the pairs. On the abscissa: ratio ω/ω_0 , where $\omega_0 = kmc^2/(E_+E_-)$. a) Distribution calculated with the formula $x/(1+x^2)^2$; b) distribution calculated with the formula (4) of the text.

variations of the total energy if this is sufficiently high). In the same figure we represent also the distribution calculated with the formula of Bethe $x/(1+x^2)^2$, which is obtained from (4) where F is regarded as a constant. One can see that, as an effect of the variation of F , the maximum of the distribution is not at the point $x = 1/\sqrt{3}$ as we have in the case of the Bethe formula, but it is shifted to the right. The experimental points shown on the diagram were obtained by selecting the pairs with $0.25 \leq a \leq 0.50$; in fact only for these pairs the distribution is practically independent of a . In fact the position of the maximum varies less than 10% between the two above mentioned extreme values. The number of pairs here considered has been furthermore reduced to 107, because those with a too large error on ω were disregarded. (See discussion in Appendix). The experimental and the theoretical curves are, as before, normalized in the same area.

We can remark that from this comparison one also finds an excess of pairs with small values of x , which can be referred to what has already been said for the Q -distribution. The limitation of the statistical data do not permit a more detailed analysis. Yet one can say perhaps that the Bethe formula gives a too narrow distribution for the small angles. On the other hand for-

mula (4) gives a distribution shifted in the opposite direction. It would be interesting to make a comparison utilising more precise experimental data and more completely elaborated theoretical expressions, i.e. a formula that gives the distribution as a function of the only ω , eliminating the dependence upon the other parameters.

We wish to express our thanks to Prof. M. SCHÖNBERG and Prof. G. OCCHIALINI for helpful discussions and to Prof. M. COSYNS for some suggestion on the method discussed in the Appendix.

APPENDIX

The angles between the two members of a pair have been corrected for the effect of the scattering on the tracks. In fact the experimentally measured angle derives from the superposition of the real angle ω and the angle due to the scattering of the electrons. The effect of the scattering is to modify the angle of the tracks, defined as the angle between the cords from the point of attack A of the pair, and it is likely to increase it. For small angles the probability that the angle is increased is of the order $(4\pi - \Omega)/4\pi$, where Ω is the solid angle defined by the aperture of the pair.

If θ_s is the mean angle of scattering of the track on the length d , the angle between the cord and the initial direction of the track is $\theta_s/\sqrt{3}$ ⁽¹⁷⁾.

If we call 1 and 2 the intersections of the tracks, in the case of absence of scattering, with a sphere of a center A and radius d , in consequence of the scattering each intersection shall be found around the above said points in circles of radii respectively $\theta_{s_1}/\sqrt{3}$ and $\theta_{s_2}/\sqrt{3}$. In view of the independence of the two points inside the two circles, we may assume $\omega_{\text{real}} = (\omega_{\text{exp}}^2 + \eta_s^2)^{1/2}$, where $\eta_s^2 = (\theta_{s_1}^2 + \theta_{s_2}^2)/3$. On the other hand when $\omega_{\text{exp}} \simeq \eta_r$, we took as a first approximation $\omega_{\text{real}} = \eta_s$.

In any case the correction on the values of Q was very small.

(17) B. ROSSI and K. GREISEN: *Rev. Mod. Phys.*, **13**, 262 (1941).

RIASSUNTO (*)

È stato fatto un confronto fra la teoria della produzione di coppie di elettroni da parte di fotoni e i dati sperimentali, per energie fino a 400 MeV. Sono state analizzate le seguenti questioni: 1) la ripartizione dell'energia fra i due elettroni nella coppia; 2) la distribuzione statistica dell'impulso ceduto alla coppia; 3) la distribuzione dell'angolo di divergenza della coppia.

(*) Traduzione a cura della Redazione.

The Decay of the Space Charges in Intermittent Discharges in Neon and Argon.

D. BRINI and P. VERONESI

Istituto di Fisica dell'Università - Bologna

(ricevuto il 14 Ottobre 1953)

Summary. — The influence of the gas pressure and of the distance of the electrodes on the process of the decay of space charges in intermittent discharges in neon and argon is examined. The decay time appears in both gases to be of the order 10^{-8} s, and are, for the distances and pressures examined, sensibly proportional to the pressure. The possible causes of the high values of such times are discussed, and the various parts of the static characteristic of a discharge tube are related to the functioning of counters and periodic discharges of the 1st and 2nd kind, which might there exist.

1. — It is known that when a discharge tube containing a gas at low pressure inserted in a circuit of the type shown in Fig. 1 (*), intermittent discharges result. VALLE's ⁽¹⁾ studies have shown that three typically different situations can be realized by varying one of the three parameters of the external circuit E, R, C :

- i) discharges in counter region;
- ii) periodic discharges called « first kind » discharges;
- iii) periodic discharges called « second kind » discharges.

Counter region is characterised by discharges which follow each other at irregular intervals. Such discharges occur when the gas is irradiated by means

(*) Resistance R can conveniently be substituted by a diode in saturation, whose equivalent resistance can be varied by varying the heater current.

⁽¹⁾ G. VALLE: *Phys. Zeits.*, **27**, 473 (1926); **43**, 473 (1942).

of an external ionizing agent (the intensity of cosmic radiation at sea level is sufficient). The statistical frequency of these discharges increases with the increase of radiation intensity up to a maximum value: beyond this value the discharges become periodic, and any further increase in radiation intensity no longer produces any effect. With this intensity remaining constant moreover, the statistical frequency increases as the e.m.f. E increases. For a certain value of E , independent of the amount of irradiation, the discharges become periodic in character, instead of statistical, and the corresponding frequency is a characteristic of the tube, called «block frequency»⁽²⁾. Block frequency is also the lower limit of the frequencies of the periodic discharges of the 1-st kind, when the tube is only slightly irradiated. By varying the parameters of the external circuit, such frequencies can be continuously increased, until an unexpected change in the situation does arise, the frequency becomes abruptly higher, while the starting potential of each discharge diminishes considerably and transition to 2-nd kind discharges takes place. In the field of 2-nd kind discharges also the frequency can be gradually increased, with a suitable variation in the parameters of the external circuit, until transition to continuous glow discharge is arrived at. Very often the transition between 1-st and 2-nd kind takes place through an intermediate form known as «group discharges».

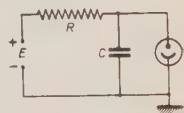


Fig. 1.

The following interpretation has been suggested by VALLE [l. c.⁽¹⁾] for the above mentioned phenomena:

1) Transition to 2-nd kind discharges is due to the non complete disappearance, in the time interval between one and its following discharge, of the space charges which deform the field between the electrodes during the discharges: it follows, therefore, that every discharge starts when the field is still deformed and therefore at a potential less than the normal one.

2) In the case of 1-st kind discharges instead, the time interval between two successive discharges is greater: what remains each time of the preceding discharge is then only a residue of ionization sufficient for eliminating the counter effect.

3) When the tube functions as a counter, the time interval between two successive discharges is still greater, and in fact sufficient to determine the complete deionization of the interelectrode space, so that the discharges can start only with statistical frequency, dependent upon the tube irradiation. Such irradiation, however, must not be so strong as to eliminate, with the

(2) G. DASCOLA and G. VALLE: *Atti Acc. Scienze Torino*, **69**, 199 (1938-39).

ionization produced, the counter effect, as happens in 1-st kind discharges in virtue of the internal residual ionization.

There are, therefore, two time intervals which are of interest to draw a schematical picture of these phenomena:

a) the time τ_1 , necessary for the disappearance of space charges deforming the field, since the discharge has dead down;

b) the time τ_2 , which is obviously greater and necessary for the complete deionization of the gas.

When the interval between two successive discharges is equal to τ_1 , the transition from 1-st kind to 2-nd kind occurs; when it is equal to τ_2 , the transition from counter region to that of the 1-st kind takes place. If the duration of individual discharges is negligibly small in respect of these times, as is generally the case, τ_1 and τ_2 identify themselves with the reciprocal values of the corresponding transition frequencies. Therefore τ_2 is equal to the reciprocal of the block frequency, while τ_1 is equal to the reciprocal of the frequency of the end of 1-st kind, i.e. the reciprocal of the highest frequency of the 1-st kind, as will be clarified later. VALLE has found that τ_1 is of the order of 10^{-3} s: VALLE and DASCOLA have found that τ_2 is of the order of 10^{-2} s.

Considering the interest presented by a greater precision of these times (or of the relative frequencies) in their dependency on the various factors capable of influencing the respective values, we have examined these phenomena by means of techniques available to-day. The present paper gives the results of a first series of measurements, regarding in particular the transition from the 1-st to 2-nd kind in neon and argon.

2. - The frequency was measured by a scaling circuit, either, alone, or in conjunction with a counting rate meter (Fig. 2): use was also made of the

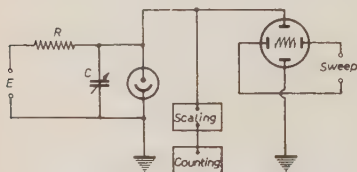


Fig. 2.

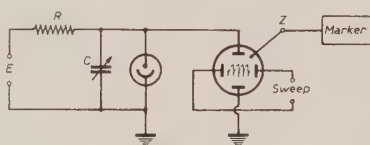


Fig. 3.

oscillographic method, with a gauged time marker (Fig. 3). With the aim, moreover, to observe in a single experiment 1-st and 2-nd kind discharges and the continuous transition, and to be able to make direct comparisons between them, a particular method was used (Fig. 4). This method consists

in obtaining frequency variations with a constant R and C , and an e.m.f. E increasing at a suitable rate. The required succession of phenomena was thus obtained and the periodic repetition of this succession with a rate low enough with respect to that of the discharges. The e.m.f. E is obtained from the relaxation oscillations of a thyatron: their rising part is practically linear and lasts from 1/50-th to 1/20-th of a second. With this method the oscillogram reveals in fact the time

behaviour of the potential difference at the electrodes of the discharge tube. The oscillations between maximum and minimum, corresponding respectively to the starting and extinguishing of the discharges, follow each other with a fre-

quency which increases slowly from beginning to end of the oscillogram (Fig. 5). But the variable which here in reality is of interest is not indeed the time, but rather the e.m.f. E , which is a function of it and derived separately

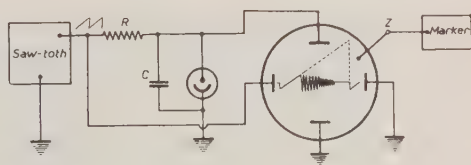


Fig. 4.

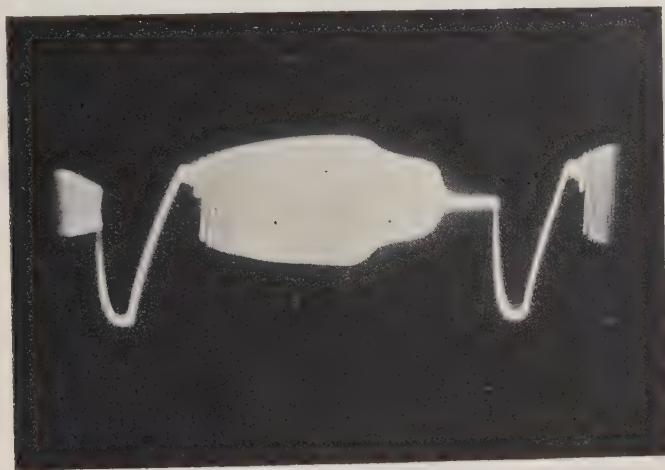


Fig. 5.

from the saw-toothed oscillations of the thyatron. A single oscillogram allows us to read out directly (and at a glance) the starting potential, the minimum potential and the frequency of the intermittent discharges, both of the 1-st and 2-nd kind according to the values of C and R , as a function

and in a wide range of E -values. The method described here, does not however permit to include in the same oscillogram the counter region of functioning and its transition to 1-st kind discharges, since the corresponding frequencies are of the same order of those of thyatron oscillations.

In our case the repetitive rate of the discharges is gradually varying from left to right (E increasing); the measurement of such repetitive rate is how-

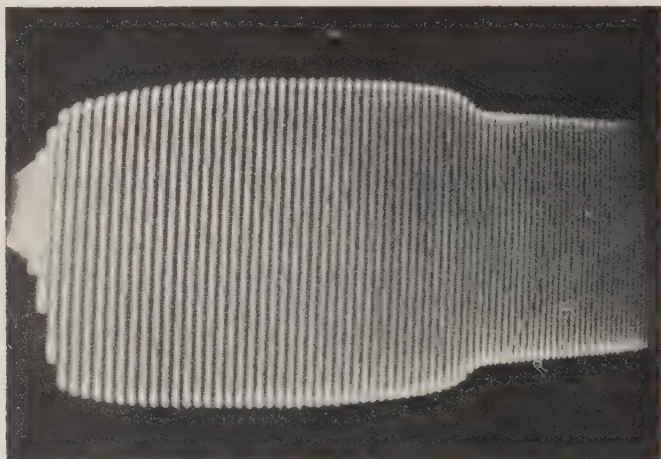


Fig. 6.

ever possible by using the time markers; this comes out to be particularly simple, if one refers to the stationary points on the locus of the time marks. These points, on the other hand, can be easily moved along the same oscillo-

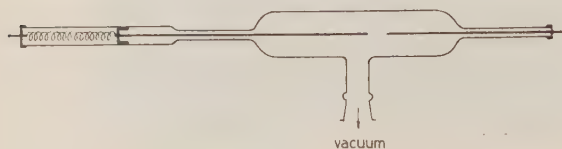


Fig. 7.

gram, by modifying the fixed frequency of the marker (Fig. 6). The measurements were carried out with a tube (Fig. 7) with coaxial iron filiform electrodes, of a diameter

of 1.5 mm, one of which was movable for the purpose of varying the distance without opening the tube. The choice of filiform electrodes was due to the fact that, with such electrodes, intermittent discharges, in addition to starting with comparatively lower potentials, proved much more stable and regular than with other forms of electrodes. The results which were port were obtained

with the first of the methods quoted: the end frequencies of the 1-st kind were determined by varying the C capacity.

We first of all measured the end frequencies of the 1-st kind using neon (99.5% purity) in a vial at pressure varying between ≈ 10 torr and 1 torr. The e.m.f. was 500 V. The reciprocal of the frequency was taken as τ_1 , while discharge times were neglected, because they always resulted of the order of some percent of τ_1 . By plotting τ_1 versus distance of the electrodes, for different values of the gas pressure, we get the curves of Fig. 8; the same results are also plotted in Fig. 9, as a τ_1 versus p diagram.

A second series of measurements was carried out in a similar way with argon. The e.m.f. used was 1000 V. We limited ourselves to exploring low pressures only, because, for higher pressures, the measurements did not prove to be easily reproducible. The curves in Fig. 10 and 11 show the experimental results obtained.

From an observation of these diagrams it can be said that the values of τ_1 are related to p and d by a formula of the type

$$\tau_1 = Kpd^2$$

where K seems to be characteristic of the gas, all other conditions of measurement (tube, electrodes, external circuit) being equal.

3. - Let us now consider the static characteristic of a discharge tube (Fig. 12). Our problem involves consideration of regions 1, 2 and 3 of the plan (i , V) (plan of the stable and transitory phases of discharge): field 2 contains the static characteristic of Townsend's phase, while in field 3 appears

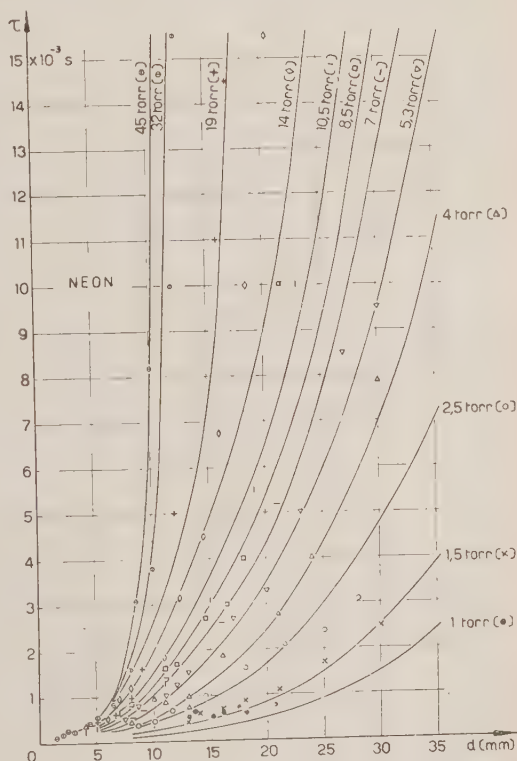


Fig. 8.

that of the glow discharge. Experiment (relative in particular to G.M. counters) shows that in field 1, there can be no stable discharge conditions if the tube is not irradiated: in such a case, therefore, the part corresponding to the static characteristic is lacking. With sufficiently high radiation, the discharge current

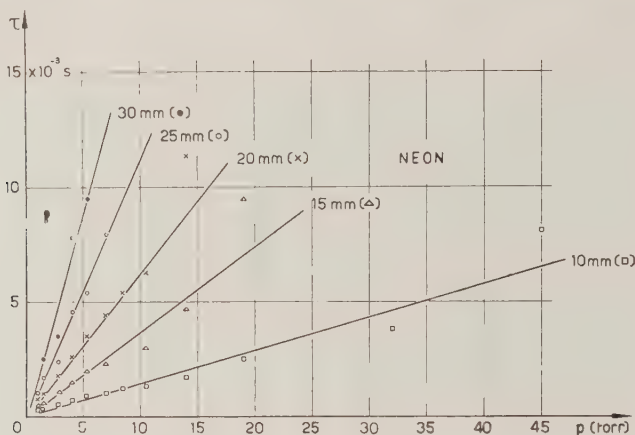


Fig. 9.

can be stabilized, however, even in field 1, and the static characteristic corresponding there to comes out to be of the form of the dashed curve *ABCD*. In the stage of the curve *AB* the conditions are the same as in ionization chambers: in the stage *BC*, proportional multiplication appears, and in the *CD* stage Townsend's phase is found stabilized by irradiation. The stages *AB* and *BC* of the curve depend on irradiation intensity, because the discharge current is not autonomous. The stage *CD*, however, does not depend on the amount of irradiation, provided that this is such as to ensure stabilization of the discharge, which in such conditions is autonomous.

When radiation is very weak in field 1, transitory processes of discharge can only develop, pulses statistical in form and frequency: these depend generally on the nature and intensity of the radiation which causes them, and on the way in which the tube is fed.

In our experimental conditions at variance with the case of usual G.M. counters, the values of the discharge current extend not only to region 1, but also to region 3, so that pulses develop each time even as far as glow discharge. After a pulse is exhausted, the successive one is started while the potential at the tube electrodes is crossing, with a rapidity corresponding to the time constant of the supply circuit, the points of the static characteristic. It is now obvious that this can happen, as the case may be, either in field 1 at

the points of a dynamic characteristic d_1 , which are above the static characteristic CD , or in field 2 at the points of a dynamic characteristic d_2 , placed above the part DE of the static characteristic, or finally at the points of a dynamic characteristic d_3 , placed above the part FGH of the static characteristic. If radiation is weak, the first case corresponds to the behaviour of the tube functioning as a (glow) counter, while, whatever may be the radiation amount, the 2-nd and 3-rd cases correspond respectively to the periodical discharges of the 1-st and 2-nd kind.

In glow-counter functioning, every pulse starts on one of the possible d_1 characteristics at an overtension which is different in every single case and statistically distributed: stronger irradiation has the effect of causing every difference between the cases d_1 and d_2 to disappear, thus eliminating counter effect. The succession of the three types of functioning of the intermittent discharges seems therefore, to be

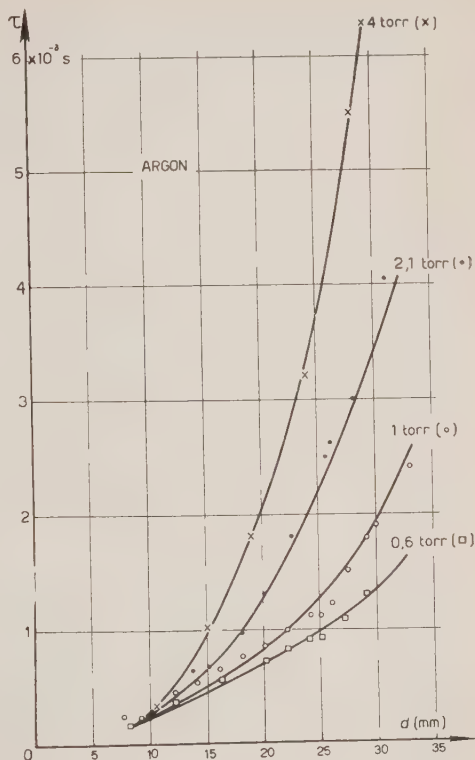


Fig. 10.

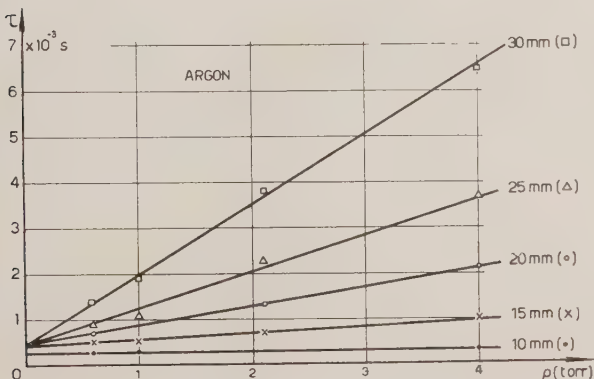


Fig. 11.

essentially determined, both as regards the field of existence and the starting potential of each kind, by the behaviour of the static characteristic of the discharge tube which is being used. The upper profile of the

oscillogram in Fig. 5 and 6 resembles in fact apparently, although only qualitatively, the *DEFG* development of the static characteristic: but the abscissa is, in the two cases, very different, and the starting potentials are

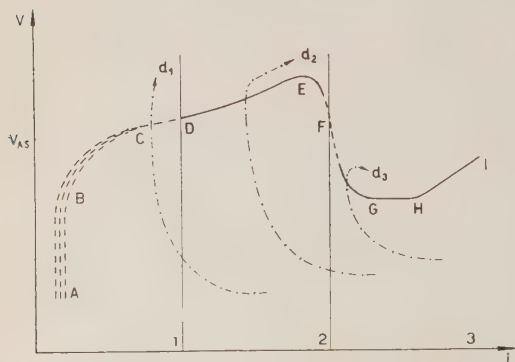


Fig. 12.

not, for the 1-st kind, those of the static characteristic, but higher. The appearance of supertensions depending on the e.m.f. and the frequency, even in the starting of the intermittent discharges of the 1-st kind, has already been proved by MAUZ and SEELIGER ⁽³⁾ and interpreted by these authors as due to a statistical delay in the discharge. But actually this statistical character of the supertensions at the

start of 1-st kind discharges is entirely lacking. For each particular frequency the starting potential of all partial discharges is in fact in this case the same. The fact that such a potential is higher than that on the static characteristic is merely due to the regular development of the dynamic process, which repeats itself identically in each pulse. Now the natural limits of the types of intermittent discharges under consideration appear well distinguished on the static characteristic simply by the mere limits of that part of it which refers to Townsend's stable phase (points *D* and *E*). If the pulses start to the left of point *D* counter functioning will follow, with supertensions and intervals between the pulses statistically fluctuating. If the pulses start between *D* and *E* the normal case of 1-st kind discharges takes place: if these start to the right of point *E* the case of 2-nd kind discharges arises. Consequently, in order to determine the deionization time τ_2 and the decay time τ_1 of the space charges, one must respectively take into consideration the block frequency, or that of the beginning of the 1-st kind (starting point of the periodic pulses near *D*), and the end frequency of the 1-st kind (starting point of the periodic pulses near *E*): this was in fact the procedure followed.

4. - Every attempt to interpret the disappearance of the positive space charges and to account quantitatively for the experimental results, must necessarily take into account the different processes which take place during this

⁽³⁾ E. MAUZ and R. SEELIGER: *Phys. Zeits.*, **26**, 47 (1925).

phase of the intermittent discharge. These processes can be considered to be:

- 1) migration of the charges under field action;
- 2) migration of the charges owing to diffusion;
- 3) recombination.

In so far as regard point 1), if regeneration processes are not admitted, simple calculations conducted by considering the transit time of the positive ions in the average field of the cathodic space, give times smaller by a factor 10^{-2} of the experimental ones. Moreover, with this hypothesis, the times referred to above would result to be independent from the distance of the electrodes. If therefore we want to maintain that the disappearance of the space charge in the cathodic space is only due to the field action, we must admit that regeneration processes play an important role, by partially compensating the charges that have disappeared, with a factor $\gamma(e^{x/l_0} - 1)$ always less than 1, but quite near to 1 (where l_0 is the cathodic space).

Although that can explain the high experimental value of τ_1 it would not, however, be able to account for the strong dependence of τ_1 on d . This strong dependence of τ_1 on d seems to suggest that the processes studied may also take place in the entire space between the electrodes.

As for the other two points, a reasonable evaluation of their quantitative contribution seems even less simple. The data reported by RUMPF⁽⁴⁾, relative to recombination influence, refer to a well-defined particular case which cannot be reasonably applied in our processes.

It seems, therefore, difficult at present to work out a reasonably simple theoretical scheme, which could be easily compared with our present experimental data.

It is a pleasure to express here our thanks and deepest gratitude to Prof. VALLE, Director of the Institute, for his guidance in matters of research, as well as for his valuable suggestions and, moreover, for his counsel in advising us to offer the results of such studies to the Conference on Ionization at Oxford in July of the current year. At the same time we express our gratitude to Mr. L. TESTONI, chief of the technical works of the Institute, for the construction of the experimental equipment.

(⁴) E. RUMPF: *Ann. d. Phys.*, **50**, 66 (1921).

RIASSUNTO

Viene studiata l'influenza della pressione del gas e della distanza degli elettrodi sul processo di decadimento delle cariche spaziali nelle scariche intermittenti in neon e in argon. I tempi di decadimento risultano in entrambi i gas dell'ordine di grandezza di 10^{-3} s e sono, nell'intervallo esaminato, sensibilmente proporzionali alle pressioni. Si discutono le possibili cause dell'elevato valore di tali tempi e si mettono in relazione le varie parti della caratteristica statica di un tubo da scarica con i regimi di contatore e di scariche periodiche di prima e di seconda specie, che vi possono sussistere.

On the Scattering Theory of Relativistic Equations.

E. CORINALDESI (*)

Division of Physics, National Research Council - Ottawa, Canada

(ricevuto il 19 Ottobre 1953)

Summary. Parzen's method of evaluating the phase shift at infinite energies is extended to the case when the potential has a pole at the origin.

Introduction.

An interesting investigation of the properties of the phase shift in the scattering theory of the Dirac equation was carried out some time ago by PARZEN, in the first paper of a series ⁽¹⁾ concerned with the use of high energy electrons for the study of nuclei. PARZEN showed that, at relativistic energies, new features are encountered, quite unlike those of the scattering theory of the Schroedinger equation. One important result was that the phase shift for the Dirac and for the Klein-Gordon equation, instead of vanishing in the limit $k \rightarrow \infty$, tends to the finite value $\int_0^\infty V(r) dr$, if the potential $V(r)$ has no pole at $r = 0$, and decreases at large distances more rapidly than the Coulomb potential. In the second paper of the series, PARZEN added the extension of his formula to the case of potentials which behave like $1/r$ at infinity, but which have still no pole at the origin.

It is the purpose of this note to consider precisely the opposite case, i.e. when $V(r)$ does have a pole at the origin, but decreases at large distances more rapidly than $1/r$. It will be shown that, on this assumption, the phase shift increases like $\alpha_{-1} \ln k$ for $k \rightarrow \infty$, the coefficient α_{-1} being the residue of the potential at $r = 0$.

(*) National Research Laboratories Postdoctorate Fellow.

(1) G. PARZEN: *Phys. Rev.*, **80**, 261, 355 (1950); **81**, 808 (1951).

For the sake of generality we shall give formulae for the asymptotic value of the phase shift of the Dirac and of the Klein-Gordon equation, for a potential behaving like

$$(I) \quad V(r) = \frac{\alpha_{-1}}{r} + \alpha_0 + O(r),$$

for small r , and like

$$(II) \quad V(r) = \frac{\beta_{-1}}{r^2} + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

for large r .

1. - Phase shift of the Klein-Gordon equation.

The equation

$$(1.1) \quad G_l'' + \left(k^2 - 2EV + V^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) G_l = 0,$$

with $E = \sqrt{k^2 + 1}$, is, in special units, the radial K.-G. equation for angular momentum l . If $V(r)$ satisfies eq. (I), eq. (1.1) has a solution behaving like

$$(1.2) \quad G_l = r^{\lambda+1}(1 + O(r)),$$

for small r , with

$$(1.3) \quad 2\lambda + 1 = \sqrt{(2l+1)^2 - 4\alpha_{-1}^2},$$

while for large r

$$(1.4) \quad G_l \sim A_l(k) \sin \left(kr - \frac{l\pi}{2} - \frac{b}{k} \ln 2kr - \delta_l(k) \right)$$

with

$$(1.5) \quad b = E\beta_{-1}.$$

Eqs. (1), (2), (4) define the phase shift $\delta_l(k)$ and the amplitude $A_l(k)$; restrictions on α_{-1} are easily derived from eq. (1.3) and the requirement that G_l/r be regular at the origin.

In order to apply a modified version of Parzen's method, we write eq. (1.1) in the form

$$(1.1') \quad G_l'' + \left(k^2 - \frac{2a}{r} - \frac{\lambda(\lambda+1)}{r^2} - U(r) \right) G_l = 0,$$

where

$$(1.6) \quad a = (E - \alpha_0)\alpha_{-1}$$

and

$$(1.7) \quad U(r) = -\frac{2a}{r} + 2EV - V^2 + \frac{l(l+1) - \lambda(\lambda+1)}{r^2}.$$

Note that $U(r)$ has no singularity at the origin.

We then consider the auxiliary equation

$$(1.8) \quad G_l^{(0)''} + \left(k^2 - \frac{2a}{r} - \frac{\lambda(\lambda+1)}{r^2} \right) G_l^{(0)} = 0,$$

which has a solution ⁽²⁾ behaving like

$$(1.9) \quad G_l^{(0)} = r^{\lambda+1}(1 + O(r))$$

near the origin, and asymptotically

$$(1.10) \quad G_l^{(0)} \sim A_l^{(0)}(k) \sin \left[kr - \frac{\lambda\pi}{2} - \frac{a}{k} \ln 2kr - \arg \Gamma \left(\frac{a}{ik} + \lambda + 1 \right) \right].$$

Following PARZEN, we now introduce the function $F_l^{(0)}$,

$$(1.11) \quad -kF_l^{(0)} = G_l^{(0)'} - \frac{l+1}{r} G_l^{(0)}.$$

We define also the functions $S_l^{(0)}$ and $T_l^{(0)}$ by the formulae

$$(1.12) \quad \begin{cases} G_l^{(0)} = \frac{1}{2} (S_l^{(0)} + T_l^{(0)}), \\ F_l^{(0)} = -\frac{i}{2} (S_l^{(0)} - T_l^{(0)}). \end{cases}$$

Note that $T_l^{(0)}$ is the complex conjugate of $S_l^{(0)}$, so that in the following it will be sufficient to give relations referring to the latter. Thus, for small r ,

$$(1.13) \quad S_l^{(0)} = \frac{i(l-\lambda)}{k} r^\lambda + \left(1 + \frac{ia(l-\lambda-1)}{k(\lambda+1)} \right) r^{\lambda+1} + \dots,$$

and asymptotically

$$(1.14) \quad S_l^{(0)} \sim -iA_l^{(0)}(k) \exp \left[i \left(kr - \frac{\lambda\pi}{2} - \frac{a}{k} \ln 2kr - \arg \Gamma \left(\frac{a}{ik} + \lambda + 1 \right) \right) \right].$$

⁽²⁾ H. BETHE: *Handbuch der Physik*, 24/1, p. 289.

The functions $S_l^{(0)}$ and $T_l^{(0)}$ satisfy the equation

$$(1.15) \quad 2ikS_l^{(0)'} = \left(-2k^2 + \frac{2a}{r} + \frac{\lambda(\lambda+1) - l(l+1)}{r^2} \right) S_l^{(0)} + \\ + \left(\frac{2ik(l+1)}{r} + \frac{2a}{r} + \frac{\lambda(\lambda+1) - l(l+1)}{r^2} \right) T_l^{(0)},$$

and that obtained by taking the complex conjugate.

Similarly, from the solution G_l of the original equation (1.1), we define the functions S_l and T_l by means of the formulae

$$(1.16) \quad \begin{cases} -kF_l = G_l' - \frac{l+1}{r} G_l, \\ G_l = \frac{1}{2} (S_l + T_l), \\ F_l = -\frac{i}{2} (S_l - T_l) \end{cases}$$

Such functions satisfy the equation

$$(1.17) \quad 2ikS_l' = (-2k^2 + 2EV - V^2)S_l + \left(\frac{2ik(l+1)}{r} + 2EV - V^2 \right) T_l,$$

and the complex conjugate.

Let now

$$(1.18) \quad \begin{cases} S_l = \exp[i\sigma_l] S_l^{(0)}, \\ T_l = \exp[-i\tau_l] T_l^{(0)}, \end{cases}$$

so that σ_l and τ_l are clearly complex conjugate, and satisfy the equations

$$(1.19) \quad \begin{cases} i\sigma_l' = \frac{1}{2ik} U(r) + \frac{l+1}{r} \frac{T_l^{(0)}}{S_l^{(0)}} (\exp[-i(\sigma_l + \tau_l)] - 1) + \\ + \frac{1}{2ik} \frac{T_l^{(0)}}{S_l^{(0)}} \left[(2EV - V^2) \exp[-i(\sigma_l + \tau_l)] - \frac{2a}{r} + \frac{l(l+1) - \lambda(\lambda+1)}{r^2} \right], \end{cases}$$

and the complex conjugate.

From eqs. (1.4), (1.14), (1.18) it is seen that, for large r ,

$$(1.20) \quad \sigma_l(r) \sim -\delta_l(k) + (\lambda - l) \frac{\pi}{2} + \frac{(a-b)}{k} \ln 2kr + \\ + \arg \Gamma\left(\frac{a}{ik} + \lambda + 1\right) + i \ln \frac{A_l^{(0)}}{A_l}.$$

The corresponding expression for $\tau_l(r)$ is obtained by changing the sign of the last term. Moreover, from eqs. (1.2), (1.13), (1.16) it is clear that σ_l and τ_l vanish for $r = 0$.

Subtracting the second equation of (1.19) from the first, and integrating with respect to r from 0 to ∞ , we obtain the formula

$$(1.21) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} (\delta_l(k) + (\beta_{-1} - \alpha_{-1}) \ln 2k) = (\lambda - l) \frac{\pi}{2} + \arg \Gamma(\lambda + 1 - i\alpha_{-1}) + \\ + \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\int_0^R \left(V - \frac{\alpha_{-1}}{r} \right) dr + (\alpha_{-1} - \beta_{-1}) \ln R \right],$$

by letting k tend to infinity. The terms which have dropped out contain integrals which are convergent at 0 and at ∞ by virtue of the properties of the functions involved, and which vanish for $k \rightarrow \infty$.

In order to check the above result, we consider the case of the potential

$$(1.22) \quad V(r) = \begin{cases} \frac{Z}{r} & \text{for } r < r_0, \\ 0 & \text{for } r > r_0, \end{cases}$$

i.e. a Coulomb potential which breaks off at a distance r_0 assumed to be very large. This example can be treated exactly by adapting to the Klein-Gordon equation the method given in a well-known paper ⁽³⁾. We get

$$(1.23) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} (\delta_l(k) - Z \ln 2k) = (\lambda_z - l) \frac{\pi}{2} + \arg \Gamma(\lambda_z + 1 - iZ) + Z \ln r_0,$$

where $\lambda_z = \lambda(\alpha_{-1} = Z)$; in agreement with eq. (1.21).

Although it would obviously be nonsensical to attempt to use the Born approximation for the calculation of the phases at high energies, as they are divergent in the general case which we are considering, it is easy to satisfy oneself that such a method would yield a result compatible with eq. (1.21). In fact, one would obtain an expression consisting of the first two terms of the expansion of (1.21) in powers of α_{-1} . This is also true in the case of the Dirac equation.

⁽³⁾ W. GORDON: *Zeits. f. Phys.*, **48**, 180 (1928).

2. - Phase shift of the Dirac equation.

The system of equations

$$(2.1) \quad \begin{cases} G'_l = \frac{l+1}{r} G_l - (E - V + 1) F_l, \\ F'_l = (E - V - 1) G_l - \frac{l+1}{r} F_l, \end{cases}$$

with V satisfying eq. (I), has a solution which behaves like

$$(2.2) \quad G_l = r^{\lambda+1}(1 + o(r)), \quad F_l = r^{\lambda+1}(\varepsilon + o(r)),$$

for small r , with

$$(2.3) \quad \lambda + 1 = \sqrt{(l+1)^2 - \alpha_{-1}^2}$$

and

$$(2.4) \quad \varepsilon = \frac{\lambda - l}{\alpha_{-1}}.$$

The constant λ occurring in this section is not identical with that of the K.-G. case defined in eq. (1.3).

If V also satisfies eq. (II), the asymptotic behaviour of G_l and F_l will be

$$(2.5) \quad \begin{cases} G_l \sim A_l(k) \sqrt{E+1} \sin \left(kr - \frac{l\pi}{2} - \beta_{-1} \frac{E}{k} \ln 2kr - \delta_l(k) \right), \\ F_l \sim -A_l(k) \sqrt{E-1} \cos \left(kr - \frac{l\pi}{2} - \beta_{-1} \frac{E}{k} \ln 2kr - \delta_l(k) \right). \end{cases}$$

Proceeding as for the K.-G. case, we introduce the functions S_l and T_l defined by

$$(2.6) \quad \begin{cases} G_l = \frac{\sqrt{E+1}}{2} (S_l + T_l), \\ F_l = \frac{-i\sqrt{E-1}}{2} (S_l - T_l), \end{cases}$$

and obeying the equations

$$(2.7) \quad \begin{cases} S'_l = \frac{i}{k}(k^2 - EV)S_l + \left(\frac{l+1}{r} - \frac{i}{k}V\right)T_l, \\ T'_l = -\frac{i}{k}(k^2 - EV)T_l + \left(\frac{l+1}{r} + \frac{i}{k}V\right)S_l. \end{cases}$$

Use will also be made of two auxiliary functions $S_l^{(0)}$ and $T_l^{(0)}$, which are solutions of the equations obtained from (2.1) on replacement of V by α_{-1}/r . Such functions will behave according to (2.2) near the origin, and asymptotically

$$(2.8) \quad \begin{cases} G_l^{(0)} \sim A_l^{(0)}(k) \sqrt{E+1} \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} - \alpha_{-1} \frac{E}{k} \ln 2kr - \delta_l^{(0)}(k)\right), \\ F_l^{(0)} \sim -A_l^{(0)}(k) \sqrt{E-1} \cos\left(kr - \frac{l\pi}{2} - \alpha_{-1} \frac{E}{k} \ln 2kr - \delta_l^{(0)}(k)\right), \end{cases}$$

with ⁽⁴⁾

$$(2.9) \quad \exp[-2i\delta_l^{(0)}] = \frac{i\alpha_{-1} - (l+1)k}{iE\alpha_{-1} + (l+1)k} \frac{\Gamma(\lambda+2 + i(E/k)\alpha_{-1})}{\Gamma(\lambda+2 - i(E/k)\alpha_{-1})} \exp[-\pi i(\lambda - l + 1)].$$

The functions $S_l^{(0)}$ and $T_l^{(0)}$, expressed in terms of $G_l^{(0)}$ and $F_l^{(0)}$ by relations identical in form with (2.6), obey the equations obtained from (2.7) by substituting α_{-1}/r for V . The remaining part of the procedure, which consists in defining σ_l and τ_l as in eq. (1.18), and in integrating with respect to r from 0 to ∞ the equations for these new functions, runs precisely as in section 1, and it seems superfluous to reproduce it here. The final result is

$$(2.10) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} (\delta_l(k) + (\beta_{-1} - \alpha_{-1}) \ln 2k) = (\lambda - l) \frac{\pi}{2} + \arg \Gamma(\lambda + 1 - i\alpha_{-1}) + \\ + \frac{i}{2} \ln \left(\frac{l-1}{\lambda+1-i\alpha_{-1}} \right) + \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\int_0^R \left(V - \frac{\alpha_{-1}}{r} \right) dr + (\alpha_{-1} - \beta_{-1}) \ln R \right].$$

3. - Discussion of results.

We can distinguish several special cases:

1) $\alpha_{-1} = \beta_{-1}$. According to eqs. (I) and (II), this is not necessarily the case of a purely $1/r$ potential. At high energy $\delta_l(k)$ tends to a finite value. The integrals in (1.21) and (2.10), which depend essentially on the potential at finite distances, vanish identically if $V = \alpha_{-1}/r$ everywhere.

2) $\alpha_{-1} = 0$, $\beta_{-1} \neq 0$. For this case, already considered by PARZEN, the

⁽⁴⁾ N. F. MOTT and H. S. W. MASSEY: *The Theory of Atomic Collisions* (Oxford, 1949), p. 79.

phase shift diverges like $-\beta_{-1} \ln k$ for $k \rightarrow \infty$. This logarithmic divergence is of a rather spurious character, and depends on the special form adopted in eqs. (1.4) and (2.5) for the asymptotic behaviour of G_l . It arises from the fact that V has not a polar singularity at the origin to match the $1/r$ decrease at infinity, so that, at very high energies, the phase may differ considerably from the finite Coulomb-like phase in case 1).

3) $\alpha_{-1} \neq 0$, $\beta_{-1} = 0$. This case was not considered by PARZEN, probably on account of its irrelevance to the problem of scattering of electrons by nuclei, the latter being usually represented as continuous distributions of charge producing potentials which have no singularity at the origin. It might be of interest, however, in problems of atomic physics, such as the scattering of high energy charged particles by hydrogen atoms in the one-body approximation, with ⁽⁵⁾

$$V(r) = -\varepsilon^2 \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{a_0} \right) \exp[-2r/a_0].$$

The phase shift $\delta_l(k)$ diverges like $\alpha_{-1} \ln k$ for $k \rightarrow \infty$, so that the slope of a graph of $\delta_l(k)$ versus $\ln k$ would immediately yield the physical quantity α_{-1} .

It is not perhaps amiss to consider briefly an important feature of the scattering by potentials which have a pole at the origin. For those which do not ($\alpha_{-1} = 0$), all the phases are equal at high energies, as $\lim_{k \rightarrow \infty} \delta_l(k)$ is independent of l . Therefore, the scattered amplitude for $k \rightarrow \infty$ is proportional to the quantity $\sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)P_l(\cos \theta)$, which, though divergent, is summable for $\theta \neq 0$, the sum being zero. This implies the existence of an extremely narrow maximum at $\theta = 0$ for the scattered intensity. On the other hand, when $\alpha_{-1} \neq 0$, the above property does not hold, and the distribution may be expected to flatten out. A more careful study of this point is in progress.

My thanks are due to Dr. G. HERZBERG for enabling me to spend the summer months at the National Research Council of Canada, and to Dr. TAYOU WU and my colleagues for their interest in my work.

⁽⁵⁾ Reference ⁽⁴⁾, p. 184.

RIASSUNTO (*)

Si estende il metodo di Parzen per il calcolo dello spostamento di fase alle energie infinite al caso in cui il potenziale ha un polo all'origine.

(*) Traduzione a cura della Redazione.

Remarks on the Validity of the Tamm-Dancoff Method (*).

G. MORPURGO and B. F. TOUSCHEK

Istituto di Fisica dell'Università - Roma
Istituto Nazionale di Fisica Nucleare - Sezione di Roma

(ricevuto il 19 Ottobre 1953)

Summary. — An example of a field which has already been investigated by WENTZEL and BLATT is discussed in detail. The exact solution of the problem corresponding to the scattering of a meson by a nucleon is compared with that obtained by the first approximation of the Tamm-Dancoff method. It is found that this method leads to results, which, though better than those obtained in perturbation theory are essentially qualitative. The disagreement is particularly strong, if the coupling constant is nearly sufficient to give rise to bound states.

Introduction.

The Tamm-Dancoff method ⁽¹⁾ has been recently applied to various problems of meson theory: DANCOFF, LEVY ⁽²⁾ and KLEIN ⁽³⁾ have treated the deuteron problem, CHEW ⁽⁴⁾, DYSON ⁽⁵⁾ and FUBINI ⁽⁶⁾ the scattering of mesons by nucleons and CINI ⁽⁷⁾ has given a covariant formulation of the method, which admits the treatment of the renormalisation question. The validity of the method, however, has not yet been investigated; in the case of the

(*) Part of this work was communicated at the Cagliari meeting of the Italian Physical Society, September 23-27, 1953.

(1) I. TAMM: *Journ. Phys. USSR*, **9**, 449 (1945); and S. M. DANCOFF: *Phys. Rev.*, **78**, 382 (1950).

(2) M. LEVY: *Phys. Rev.*, **88**, 72, 725 (1952).

(3) A. KLEIN: *Phys. Rev.*, **90**, 1101 (1953).

(4) G. F. CHEW: *Phys. Rev.*, **89**, 591 (1953).

(5) F. DYSON et al.: *Proceedings of the Rochester Conference*, December 18-20, (1952).

(6) F. FUBINI: *Nuovo Cimento*, **10**, 564 (1953).

(7) M. CINI: *Nuovo Cimento*, **10**, 526, 614 (1953).

scattering of mesons the results of the first order approximation have merely been compared with the experimental data.

It therefore appears useful to study in more detail what degree of accuracy can be expected from this method. For this purpose we choose an example which on the one hand is sufficiently simple to allow an accurate solution and which on the other hand should be sufficiently complex to give significant results. We shall restrict ourselves to a comparison between the accurate solutions of the example, which describes the scattering of a «meson» by a «nucleon», and the first approximation of the Tamm-Dancoff method.

The example which we chose is one which has been used by WENTZEL ⁽⁸⁾ in various publications and by BLATT ⁽⁹⁾ in an investigation of the validity of the Heitler method. It is a field which can be described in terms of the Hamiltonian

$$(1) \quad H = H_0 + \bar{H} = \frac{1}{2} \int (\pi^2(\underline{x}) + (\nabla\varphi)^2 + \mu^2\varphi^2) d^3\underline{x} + \frac{1}{2} g \left\{ \int \varphi(\underline{x}) U(\underline{x}) d^3\underline{x} \right\}^2$$

where

$$U(\underline{x}) = U(|\underline{x}|), \quad \int U(\underline{x}) d^3\underline{x} = 1.$$

We observe that this Hamiltonian describes the interaction of a «meson-field» with a fixed «nucleon-source». It gives rise to the virtual creation and annihilation of pairs of mesons and contains first order matrix elements for the scattering of a meson. This last fact simplifies greatly the first order calculation with the T.D. method. The limitation to the first order approximation is in keeping with the treatments hitherto given to the meson scattering problem, in which all those states are neglected the introduction of which would lead to coupled integral equations.

Although BLATT has already obtained an expression for the cross-section of meson scattering, it appears to us that some qualifications have to be made to this derivation, regarding the possibility of bound states as well as the interpretation of the results of his canonical transformation. We shall therefore give a derivation of the cross-section in the first four paragraphs. In particular we shall treat the diagonalisation of the Hamiltonian in the first, and the question of renormalisation in the second. In the third we shall discuss the physical significance of the transformed states and variables and in the fourth we shall give the actual derivation of the cross-section. The 5th paragraph contains the solution of the T.D. equation and a comparison of the approximate results with the accurate ones.

⁽⁸⁾ G. WENTZEL: *Helv Phys. Acta*, **25**, 569 (1952) and preceeding works.

⁽⁹⁾ J. M. BLATT: *Phys. Rev.*, **72**, 466 (1947).

1. - Diagonalisation of the Hamiltonian.

Preliminary Considerations. - We denote by

$$p_{k,l,m}, \quad q_{k,l,m},$$

the operators associated with the oscillator of the component of the meson field with energy

$$\omega_k = \sqrt{k^2 + \mu^2},$$

angular momentum l and magnetic quantum-number m . Since the interaction in the Hamiltonian (1) only acts on the s -component of the meson we put $p_{k00} = p_k$, $q_{k00} = q_k$ and therefore

$$(1) \quad p_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \int \pi(\underline{x}) \frac{\sin kr}{r} d^3\underline{x}, \quad q_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \int \varphi(\underline{x}) \frac{\sin kr}{r} d^3\underline{x},$$

where R is the radius of the sphere of normalisation. It thus follows from (1) that the part H_s of the Hamiltonian corresponding to the s -component has the form:

$$(2) \quad H_s = \frac{1}{2} \sum_k (p_k^2 + \omega_k^2 q_k^2) + \frac{1}{2} g \sum_{kk'} q_k q_{k'} v_k v_{k'},$$

where we have put

$$v_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \int d^3\underline{x} U(\underline{x}) \frac{\sin kr}{r}.$$

For the following it is convenient to introduce the usual operators of creation and annihilation, for which one has, owing to the reality of the q_k and p_k

$$q_k = \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} (\alpha_k + \alpha_k^\dagger), \quad p_k = i \sqrt{\frac{\omega_k}{2}} (\alpha_k^\dagger - \alpha_k).$$

The transformation

$$(3) \quad q_k = \sum_{k'} \xi_{kk'} Q_{k'},$$

in which $\xi_{kk'}$ is real and satisfies the equation

$$(4) \quad (W_k^2 - \omega_{k'}^2) \xi_{k'k} = g v_{k'} \sum_l v_l \xi_{lk'}$$

(where W_k is the eigenvalue of the equation) diagonalises (1) on account of the orthogonality relation

$$\sum_{k'} \xi_{k'r} \xi_{k's} = \delta_{rs}.$$

For the possibility of the expansion (3) we have also to require that the $\xi_{kk'}$ form a complete set:

$$\sum_k \xi_{rk} \xi_{sk} = \delta_{rs}.$$

The Solution of (4). — It is easily seen that equation (4) admits a set of solutions of the form

$$(5) \quad \xi_{k'k} = \delta_{k'k} + gP \frac{v_{k'} v_k}{k'^2 - k'^2} \frac{1}{1 - gS_k},$$

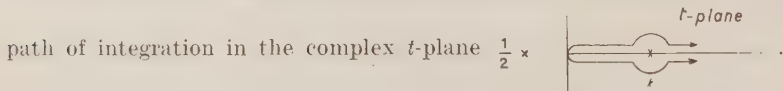
where

$$(6) \quad S_k = P \sum_t \frac{v_t^2}{k^2 - t^2}.$$

To obtain (5) one has to put $W_k^2 = \mu^2 + k^2$ and to assume that k is not a solution of

$$(7) \quad \Delta_k = 1 - gS_k = 0.$$

The symbol P in (5) and (6) denotes the principal value, defined by the following



Other solutions of (4) are of course obtained by a different treatment of the singularity. BLATT has chosen a solution which represents outgoing waves only

and which is defined by a path of integration of the form 

His solution is of course completely equivalent to ours but leads to a complex $\xi_{kk'}$, which we have excluded by our choice (3) of the diagonalising transformation.

If $k = k^*$ is a solution of (7) it is easy to see that

$$\xi_{k'k^*} = \lim_{k \rightarrow k^*} \xi_{k'k}$$

and it therefore follows that the solutions (5) completely exhaust the continuous spectrum.

There are, however, other solutions (4) corresponding to bound states of the system. Putting $k = ik_0$ in equation (4) it is easy to see that if

$$(8) \quad 1 + g \sum_{k'} \frac{v_{k'}^2}{k_0^2 + k'^2} = 0,$$

has roots $|k| < \mu$ (and no roots with $|k| > \mu$, in which case the system, due to the appearance of run away solutions, probably cannot represent a physical field) there exist solutions of the form

$$(9) \quad \xi_{k'/k_0} = \frac{v_{k'}}{k_0^2 + k'^2} C_{k_0},$$

where C_{k_0} is a constant of normalisation. The Fourier transform of ξ_{k'/k_0} vanishes exponentially for $r \rightarrow \infty$. The solutions (9) can therefore be interpreted as belonging to bound states of energy nW_0 ($W_0 = \sqrt{\mu^2 - k_0^2}$, $n = 1, 2, \dots$) of the meson field.

Orthogonality and Completeness. — The proof of orthogonality can be obtained immediately by inserting from equation (5) and (8) for the discrete states.

The demonstration of completeness is more complex and we have only succeeded in showing the validity of the completeness relation for the case

$$(10) \quad |gS_k| < 1,$$

for every real k . The demonstration will be given in appendix I.

The Diagonal form of the Hamiltonian is obtained by putting

$$(11) \quad Q_k = \frac{1}{\sqrt{2W_k}} (a_k + a_k^+), \quad P_k = i \sqrt{\frac{W_k}{2}} (a_k^+ - a_k).$$

The transformed Hamiltonian then has the form

$$(12) \quad H = \frac{1}{2} \sum_k W_k (a_k a_k^+ + a_k^+ a_k) = \sum_k a_k^+ a_k W_k + \frac{1}{2} \sum_k W_k.$$

It is useful to note the expressions for the relation between the a_k , a_k^+ and

the α_k, α_k^+ . These are obtained by using (3) and (11):

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_k = \sum_{k'} \xi_{k'k} (\alpha_{k'} \Gamma^{k'k} + \alpha_{k'}^+ \Delta^{k'k}) \\ a_k^+ = \sum_{k'} \xi_{k'k} (\alpha_{k'} \Delta^{k'k} + \alpha_{k'}^+ \Gamma^{k'k}) \end{array} \right.$$

where

$$\Gamma^{k'k} = \Gamma^{kk'} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{W_k}{\omega_{k'}}} + \sqrt{\frac{\omega_{k'}}{W_k}} \right) \quad \text{and} \quad \Delta^{k'k} = -\Delta^{kk'} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{W_k}{\omega_{k'}}} - \sqrt{\frac{\omega_{k'}}{W_k}} \right).$$

The inverse formulae can be easily obtained by using the completeness relations for the $\xi_{kk'}$.

2. - Mass Renormalisation.

The energy of the lowest state recovered from (12) is in general different from the mass of the nucleon. If one puts (in the continuous spectrum)

$$W_k = \omega_k + \frac{\varepsilon_k(g)}{R} + o\left(\frac{1}{R^2}\right),$$

the energy of this lowest state becomes

$$\frac{1}{2} \sum_k W_k = \frac{1}{2} \sum_k \omega_k + \frac{1}{2R} \sum_k \varepsilon_k(g)$$

and the last term gives a contribution even for $R \rightarrow \infty$. If therefore one adds to H^i the constant

$$M'(g) = M - \frac{1}{2} \sum_k \omega_k - \frac{1}{2R} \sum_k \varepsilon_k(g),$$

the energy of the lowest state is just equal to M . The same M' could have been added at the start to the Hamiltonian H . It therefore follows that the prescription for renormalisation in our case is just the substitution of \bar{H}' by $H' = \bar{H}' + M'(g)$. We can immediately see that in first order in g this prescription gives the right result.

The independence of our field from the nuclear variables implies that in our case the renormalisation can be effected simply by the addition of a constant to the Hamiltonian.

We therefore have to determine $\varepsilon_k(g)$. If

$$\frac{1}{r} \sin k_n r$$

is a stationary free meson wave in the sphere of normalisation and

$$\frac{1}{r} \sin (\bar{k}_n r + \delta_n)$$

is the corresponding asymptotical behaviour of the solution in the presence of an interaction, one has

$$(\bar{k}_n - k_n) + \frac{\delta_n}{R} = 0$$

and therefore

$$\frac{\varepsilon_k}{R} = (\bar{W}_{k_n} - W_{k_n}) = \frac{k_n}{W_{k_n}} (\bar{k}_n - k_n) = - \frac{k_n}{W_{k_n}} \frac{\delta_n}{R}.$$

Using the expressions of the following section 4 for the scattering phases one obtains

$$(14) \quad \varepsilon_k = \frac{k}{W_k} \operatorname{tg}^{-1} \frac{R g v_k^2}{2(1 - g S_k)k}.$$

If the normalisation procedure has to be carried out by means of a perturbation treatment, one has to expand (14) in powers of g . The first term $\varepsilon_k^{(1)}$ of this expansion is

$$\varepsilon_k^{(1)} = \frac{R g v_k^2}{2 W_k}$$

and this term is exactly the term needed for the normalization of the first approximation in the T.D. method. We shall come back to this point in section 5.

3. - Interpretation of the Theory.

In this section we want to discuss in some detail the relation between the variables of the original Hamiltonian (1), which have a simple physical significance and the variables of the transformed Hamiltonian which have to be

interpreted in terms of the physical variables. This necessity of interpretation occurs whenever a canonical transformation is carried out and it therefore appears to us that the following treatment, though cumbersome, may be of a methodological interest. To give a greater generality to the argument, we shall ignore certain properties of the Hamiltonian, which could be discovered by an application of perturbation theory — as e.g. the fact that the matrix-elements leading to the production of three mesons vanish on the energy shell (at least in first and second order). We shall denote by $\chi(n_{k_1}, n_{k_2}, \dots)$ ($a_k^+ a_k \chi = n_k \chi$) the eigenstates of the Hamiltonian H_0 and by $X(N_{k_1}, N_{k_2}, \dots)$ the stationary states of the system ($a_k^+ a_k X = N_k X$). We put $\chi(0, 0, \dots) = \chi_0$ and $X(0, 0, \dots) = X_0$.

Passing to the case of the scattering of a meson of energy E_k , we shall have to consider a combination of states X , which represent asymptotically in-going and outgoing mesonwaves of energy E_k . If $E_k < 3\mu$ (it has to be remembered that in our example mesons could only be created in pairs) only the state satisfying $a_k^+ a_k X = X$ will have this property. This state we shall denote by $X(1_k)$. Expanding $X(1_k)$ in terms of the complete system of the states of the Hamiltonian H_0 one finds

$$(15) \quad X(1_k) = \sum_{k_1} U^{(1)}(k|k_1) \chi(1_{k_1}) + \sum_{k_1 k_2 k_3} U^{(3)}(k|k_1 k_2 k_3) \chi(1_{k_1} 1_{k_2} 1_{k_3}) + \dots,$$

where $U^{(3)}(k|k_1 k_2 k_3)$ is symmetrical in $k_1 k_2 k_3$. No components with an even number of mesons need be considered. The 1-particle component of $X(1_k)$ is given by $U^{(1)}(k|k_1)$, or its Fourier transform

$$(16) \quad \Psi^{(1)}(k|r) \cong \sum_{k_1} \frac{\sin k_1 r}{r} U^{(1)}(k|k_1),$$

which may be interpreted as the wave function of the meson. Since $E_k < 3\mu$ only $U^{(1)}$ can be different from zero asymptotically. It is also clear that $U^{(1)}$ must show a singularity for $k \rightarrow k_1$ and it is just the behaviour in the vicinity of this singularity that will lead to the expressions for the scattering cross-section.

4. — Derivation of the Scattering Cross-Section.

Determination of $U^{(1)}$. — For $U^{(1)}$ one may write

$$(16) \quad U^{(1)}(k|k_1) = (\chi_0^* \alpha_{k_1} a_k^+ X_0) = (\chi_0^* \alpha_{k_1} a_k^+ [\chi_0 + \sum_{k' k''} U^{(2)}(0|k' k'') \alpha_{k'}^+ \alpha_{k''}^+ \chi_0])$$

where $U^{(2)}$ is defined by the expansion similar to (15) of the ground state of

the system:

$$(17) \quad X_0 = \chi_0 + \sum_{k'k''} U^{(2)}(0|k'k'')\chi(1_k, 1_{k''}) + \dots$$

$U^{(2)}$ —symmetrical in k' , k'' — is therefore the two particle component of the groundstate. It should also be noted that the only terms of the expansion (17) which contribute to $U^{(1)}$ in (16) are those actually written down. Using equation (13) one finds the following integral equation relating $U^{(1)}$ and $U^{(2)}$

$$(18) \quad U^{(1)}(k|k_1) = \eta_{k_1k} + 2 \sum_{k'} \zeta_{k'k} U^{(2)}(0|k_1k'),$$

where

$$\eta_{k_1k} = \xi_{k_1k} \Gamma^{k_1k}, \quad \zeta_{k_1k} = \xi_{k_1k} \Delta^{k_1k}.$$

An integral equation for $U^{(2)}$ can be found in the following manner: X_0 can be defined by

$$a_k X_0 = 0.$$

Multiplying on the left by $\chi_0^* \alpha_{k_1}$ one obtains immediately by using equation (13)

$$(19) \quad \zeta_{k_1k} + 2 \sum_{k'} \eta_{k'k} U^{(2)}(0|k_1k') = 0.$$

Equations (18) and (19) represent a system of integral equations from which in principle it should be possible to recover $U^{(1)}$ and $U^{(2)}$. We have not found a general solution of this system of integral equations. For the determination of the cross-section, however, it is sufficient to study the behaviour of $U^{(1)}$ for $k \rightarrow k_1$, and this can easily be determined from the integral equations. It is perhaps worth noting, that, as our example shows, the complete knowledge of the Heisenberg operators of the system, does not immediately lead to the quantities necessary for the interpretation of the development of the system. The problem of interpretation may in general be much more complicated, leading, as in our case, to a system of integral equations.

The Singularity of $U^{(1)}$. — We now proceed to discuss the singularity of $U^{(1)}$ by means of equations (18) and (19). First it is clear that in the following calculations we need not distinguish between W_k and ω_k in the expressions (13). Taking the sum and difference of the equations (18) and (19) one can then easily obtain an integral equation for $U^{(1)}$, namely:

$$(20) \quad U^{(1)}(k|k_1) = 2 \sqrt{\frac{\omega_{k_1}}{\omega_k}} \xi_{k_1k} - \sum_{k'} \frac{U^{(1)}(k'|k_1)}{\sqrt{\omega_k \omega_{k'}}} \sum_{k''} \omega_{k''} \xi_{k''k} \xi_{k''k'}.$$

We try to find a solution of this equation of the form

$$(21) \quad U^{(1)}(k|k_1) = \delta_{kk_1} + P \frac{f(k_1|k)}{k^2 - k_1^2},$$

in which $f(k|k_1)$ is a regular function. Remembering that $\xi_{k_1 k}$ is of the form

$$\xi_{k_1 k} = \delta_{k_1 k} + P \frac{g(k_1|k)}{k^2 - k_1^2},$$

with $g(k_1|k)$ defined by equation (5), one finds that

$$(22) \quad f(k|k_1) = g(k_1|k) + X(k_1|k),$$

where $X(k_1|k)$ is a regular function of k_1 , k and $X(k|k) = 0$. If now one defines $\eta_0(k)$ ($|\eta_0|^2 = 1$) from the asymptotical behaviour of the wavefunction $\Psi^{(1)}(k|r)$ by means of

$$\Psi^{(1)}(k|r) \rightarrow \exp[-ikr] - \eta_0(k) \exp[ikr] \quad \text{asymptotically,}$$

one has

$$1 - \eta_0(k) = \frac{2iRg(k|k)}{2k + iRg(k|k)}.$$

For the phase used in section 2 one obtains:

$$\exp[2i\delta_k] = \eta_0(k); \quad \text{tg } \delta_k = \frac{Rg(k|k)}{2k}.$$

In the paper quoted above, BLATT has determined the cross-section simply by considering the singularity of the transformation matrix $\xi_{k_1 k}$. Equation (22) is essentially Blatt's result. It has here been derived in accordance with the more general viewpoint adopted in this section and after the introduction of the two conditions 1) $E < 3\mu$ and 2) the coupling constant is chosen such that the system has no bound states. The result is probably more general than these restrictions.

5. - The First T. D. Approximation; Comparison of Results.

In the first T.D. approximation we only consider the one-meson component of the generic state vector. Calling u_k the amplitude of the 1-meson state we obtain the following integral equation

$$(23) \quad (E - \omega_k)u_k = g \frac{v_k}{\sqrt{2\omega_k}} \sum_{k'} \frac{v_{k'}}{\sqrt{2\omega_{k'}}} u_{k'},$$

where a term $gu_k \sum_r (v_r^2/4\omega_r)$ does not appear because it is exactly cancelled by our prescription for mass-renormalisation. If one would want to continue this method one would have to introduce successively the amplitudes $u(k)$, $u(k_1, k_2, k_3)$... corresponding to the amplitude of 1-, 3-, ..., meson-states respectively. This would lead to coupled integral equations.

The singular part of the solutions of (23) is formally identical with that of the solutions (5) of the equation (4) for the transformation function $\xi_{kk'}$. The expression S_k however has a different meaning, namely

$$(23) \quad S_k^{(T.D.)} = P \sum_{k'} \frac{v_{k'}^2}{2\omega_{k'}(\omega_k - \omega_{k'})}.$$

For the transition amplitudes one can therefore write:

$$(24) \quad \begin{cases} 1 - \eta_0^{(e)} = \frac{2iRgv_k^2}{2k(1 - gS_k^{(e)} - iRgv_k^2)}, \\ 1 - \eta_0^{(T.D.)} = \frac{-2iRgv_k^2}{2k(1 - gS_k^{(T.D.)} - iRgv_k^2)}, \end{cases}$$

where the indices (e) and (T.D.) respectively indicate the exact and the T.D. solution. It is immediately seen that the dissipative (HEITLER) term is the same in both expressions, the difference rests with the reactive term. For completeness we add the first Born approximation, which is

$$(24') \quad 1 - \eta_0^{(B.)} = -\frac{Rigv_k^2}{k}.$$

To discuss these expressions it is convenient to consider a particular form of v_k .

We take

$$(25) \quad v_k = \frac{a^2 k}{\sqrt{2\pi R}} \frac{1}{k^2 + a^2},$$

which corresponds to a function $U(r) = (a^2/4\pi)(e^{-ar}/r)$.

This choice is only made for reasons of simplicity. Since our example can be considered as representing the scattering of mesons by a nucleon the recoil of which is neglected it is reasonable to choose $a = M$, which is in fact equivalent to a cut-off of frequencies $>M$. In this way one obtains for $S_k^{(e)}$

$$(26) \quad S_k^{(e)} = g \frac{8}{M^3} \frac{k^2 - M^2}{(k^2 + M^2)^2}.$$

In the nonrelativistic limit $k \ll \mu < M$ one has

$$S_k^{(e)} = \frac{gM}{8} - \beta,$$

the last line serving to define β . In the T.D. case one finds

$$S_k^{(T.D.)} = S_k^{(e)} + \frac{gM^4}{2\pi} \int_0^\infty \frac{k'^2 dk'}{(k'^2 + M^2)^2} \cdot \frac{1}{2\omega_{k'}(\omega_k + \omega_{k'})}.$$

Neglecting terms of the order k^2/μ^2 and μ^2/M^2 one obtains $+\beta/2$ for the integral and therefore

$$(27) \quad S^{(T.D.)} \rightarrow -\frac{\beta}{2}.$$

There is however an inequality which β must satisfy in order that our derivations should be valid. This inequality is connected with the fact that at the moment we have only demonstrated the completeness when (10) is satisfied; in terms of β and with our choice of v_k , (10) can be rewritten

$$(10') \quad -1 < \beta < 1.$$

It is however possible that the above restrictions (10') are too severe and we have reasons to believe that the upper limit could be replaced by at least $+8$.

The lower limit in equation (10') corresponds to the fact that for $\beta < -1$ bound states with energy $n\sqrt{\mu^2 - k^2}$ ($n = 1, 2, \dots$) are possible; in fact with our choice of v_k equation (8) can be rewritten

$$(28) \quad \left(\frac{|k_0|}{M} + 1 \right)^2 = -\beta,$$

which if $\beta < -1$ has one (and only one) solution for $|k_0|$.

Using the expressions (26) and (27) and inserting into equations (23) and (24) we now have in the limit $k \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} 1 - \eta_0^{(e)} &= \frac{-2igk}{4\pi(1-\beta) - igk}, \\ 1 - \eta_0^{(T.D.)} &= \frac{-2igk}{4\pi(1-\beta/2) - igk}, \\ 1 - \eta_0^{(B.)} &= \frac{-igk}{2\pi}, \end{aligned}$$

and therefore in the same limit

$$\frac{\sigma^{(\text{T.D.})}}{\sigma^{(e)}} = \frac{(1 + \beta)^2}{(1 + \beta/2)^2}, \quad \frac{\sigma^{(\text{B.})}}{\sigma^{(e)}} = (1 + \beta)^2.$$

In the case of positive β (repulsive interaction) the ratio $\sigma^{(\text{B.})}/\sigma^{(e)}$ compatible with condition (10') is at most 4—the Born-approximation giving an overestimate for the cross-section owing to the neglect of the reactive effect—the corresponding ratio for the T.D. method is 16/9 and this is due to the fact that the reactive term of the T.D. approximation is only 1/2 of the correct reactive term.

The situation is even worse in the case of an attractive interaction. In the neighbourhood of the region in which bound states are possible the ratio $\sigma^{(\text{T.D.})}/\sigma^{(e)}$ may be made arbitrarily small.

We therefore conclude that the results given by the first T.D. approximation, although better than the ones of perturbation theory have a qualitative character; the results are slightly better in the case of repulsion than in the case of attraction.

APPENDIX

Substituting from equation (5) into the completeness relation one has

$$\begin{aligned} \sum_k \xi_{rk} \xi_{sk} = \delta_{rs} + g \frac{v_r v_s}{r^2 - s^2} \frac{1}{\Delta_r} - g \frac{v_r v_s}{r^2 - s^2} \frac{1}{\Delta_s} - g^2 \frac{v_r v_s}{r^2 - s^2} \\ \cdot \sum_t \frac{v_t^2}{r^2 - t^2} \frac{1}{\Delta_t^2} + g^2 \frac{v_r v_s}{r^2 - s^2} \sum_t \frac{v_t^2}{s^2 - t^2} \frac{1}{\Delta_t^2}. \end{aligned}$$

For the completeness it is herefore necessary that

$$(a) \quad g \sum_t \frac{v_t^2}{r^2 - t^2} \frac{1}{\Delta_t^2} - \frac{1}{\Delta_r} = \text{const} = -1.$$

The value of the constant must be -1 because of $1/\Delta_r \rightarrow 1$ for $r \rightarrow \infty$. For equation (a) one may write

$$(b) \quad \frac{\partial}{\partial g} g \sum_t \frac{v_t^2}{r^2 - t^2} \frac{1}{\Delta_t^2} = \frac{1}{\Delta_r} \sum_t \frac{v_t^2}{r^2 - t^2}.$$

Expanding $1/\Delta_t$ in a power series with respect to gS_t (supposing that $|gS_t| < 1$

in the interval in question) the proof of (b) is reduced to showing that

$$(n+1) \sum_t S_t^n \frac{v_t^2}{p^2 - t^2} = S_r^{n+1}.$$

The latter follows from the general relation

$$\frac{1}{(n-1)!} \sum_P \frac{1}{(x_1 - x_n) \dots (x_{n-1} - x_n)(x - x_n)} = \frac{1}{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)},$$

where P denotes the permutation of the n objects $x_1 \dots x_n$ among themselves.

RIASSUNTO

Il modello di campo già considerato da WENTZEL e BLATT, è discusso confrontandone la soluzione esatta con la soluzione ottenuta col metodo di Tamm e Dancoff in prima approssimazione nel caso dello scattering mesone-nucleone. Risulta che il metodo di Tamm e Dancoff conduce sempre a risultati che, sebbene siano migliori di quelli della teoria delle perturbazioni, hanno carattere qualitativo; in particolare, se la costante di accoppiamento della teoria è tale da essere in vicinanza di uno stato legato i risultati del metodo di Tamm-Dancoff sono particolarmente cattivi.

Adiabatic Nuclear Potential for Large Values of the Coupling Constant.

M. CINI and S. FUBINI

Istituto di Fisica dell'Università - Torino

Istituto Nazionale di Fisica Nucleare - Sezione di Torino

(ricevuto il 20 Ottobre 1953)

Summary. — A method for the calculation of the adiabatic potential between two fixed nucleons is proposed giving a sequence of approximations in which at each stage only a limited number of mesons and pairs is taken into account. By means of a variational principle the adiabatic potential is approximated with a sequence of fractions of polynomials in g^2 , whose coefficients contain only the potentials calculated by LÉVY and KLEIN with perturbation methods. The convergence of the sequence does not depend on the magnitude of the coupling constant and, when the limit exists, it is an analytic continuation of the series in powers of g^2 outside its radius of convergence.

1. — Introduction.

Recent attempts have been made to deduce a potential between two nucleons with the use of the Tamm-Dancoff method ^(1,3). However, as is well known, the kernel of the integral equation for the two nucleon amplitude is obtained by means of an iteration procedure. KLEIN has shown that the lowest order potentials obtained with this method give results in strong disagreement with experiment, and furthermore that the series in powers of g^2 has a very bad convergence. Both these circumstances suggest that a better solution of the problem might be obtained by using a method whose convergence does not depend on the magnitude of the coupling constant.

⁽¹⁾ M. LÉVY: *Phys. Rev.*, **88**, 72, 725 (1952).

⁽²⁾ A. KLEIN: *Phys. Rev.*, **90**, 1101 (1953); **91**, 740 (1953).

⁽³⁾ M. RUDERMANN: *Phys. Rev.*, **90**, 183 (1953).

It may be worthwhile to notice that the Lévy-Klein approximation differs essentially from a method in which the number of mesons and pairs is limited, without making any assumption on the relative magnitude of the different amplitudes (^{3b18}). A method of this kind has been recently used for the pion nucleon scattering problem (⁴⁻⁷), taking into account only amplitudes with no more than two mesons: the fact that the results show a substantial improvement in comparison with the Born approximation suggests that the amplitudes with two or more mesons cannot be simply eliminated with an iteration procedure.

In the present paper we propose a method yielding a sequence of approximations to the nuclear potential in which in each stage only a limited number of mesons and pairs is taken into account. The convergence of this sequence of potentials does not depend on the magnitude of the coupling constant, at least as long as one considers adiabatic potentials. The method can be extended in a natural way to the evaluation of the reaction operator K (⁸) for scattering problems.

2. - A compact expression for the power series expansion of the adiabatic nuclear potential.

In a previous paper (⁹) the bound state integral equation for two nucleons interacting through meson field has been deduced in a covariant way by means of a tedious and lengthy iteration procedure. In this section a new formulation will be given by means of which a compact form of the same integral equation can be obtained, and the expression for the adiabatic potential between two nucleons readily deduced with the introduction of suitable approximations.

Instead of starting from eq. (I.1) for the interaction representation state vector $\Psi(t)$ we start from

$$(1) \quad \Psi(t) = \Psi(-\infty) + \Psi(+\infty) - i \int_{-\infty}^{+\infty} H(t_1) \Psi(t_1) \varepsilon(t-t_1) dt_1,$$

(^{3b18}) F. J. DYSON: *Phys. Rev.*, **91**, 1543 (1953).

(⁴) G. CHEW: *Phys. Rev.*, **89**, 591 (1953).

(⁵) S. FUBINI: *Nuovo Cimento*, **10**, 564, 851 (1953).

(⁶) F. J. DYSON *et al.*: *Proc. of the Rochester Conference*, December 1952.

(⁷) R. KARPLUS, M. KIVELSON and P. C. MARTIN: *Phys. Rev.*, **90**, 1072 (1953);

K. A. BRUCKNER, M. GELL-MANN and M. GOLDBERGER: *Phys. Rev.*, **90**, 476 (1953).

(⁸) J. SCHWINGER: *Phys. Rev.*, **74**, 1439 (1948).

(⁹) M. CINI: *Nuovo Cimento*, **10**, 526 (1953) denoted in the following as I. All symbols not explicitly defined will have the same meaning as in I.

where

$$\varepsilon(t - t_1) = \begin{cases} \frac{1}{2} & t > t_1, \\ \frac{1}{2} & t < t_1. \end{cases}$$

In the present problem of a bound stationary state of two nucleons both the contributions from $\Psi(+\infty)$ and $\Psi(-\infty)$ vanish ⁽¹⁰⁾.

Let us introduce a projection operator η with eigenvalue zero for the states with only two nucleons and 1 for all other states with any number of mesons and pairs. Then

$$(2) \quad \Psi(t) = \Phi(t) - i \int_{-\infty}^{+\infty} \eta H(t_1) \Psi(t_1) \varepsilon(t - t_1) dt_1,$$

$$(3) \quad \Phi(t) = -i \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - \eta) H(t_1) \Psi(t_1) \varepsilon(t - t_1) dt_1.$$

Obviously $\Phi(t)$ is the component of $\Psi(t)$ describing two nucleons only. To derive an expansion in powers of g^2 of the non adiabatic kernel for the two body problem one iterates eq. (2) an odd number of times, and introduces the value of $\Psi(t)$ thus obtained into eq. (3): this gives a chain of factors

$$(1 - \eta) H \eta H \eta \dots \eta H,$$

in which all the unwanted kernels containing intermediate states with two nucleons only are automatically ruled out.

Two further assumptions are necessary to derive the adiabatic potentials of Lévy-Klein. Let us define $V(t)$ by means of

$$(4) \quad \Psi(t) = V(t) \Phi(t).$$

⁽¹⁰⁾ Both the contributions from $\Psi(-\infty)$ and $\Psi(+\infty)$ oscillate, at $t = -\infty$ and $t = +\infty$ respectively, for the bound state and a suitable limiting procedure (see M. GELL-MANN and M. L. GOLDBERGER: *Phys. Rev.*, **91**, 398 (1953)) makes these terms vanish. Eq. (1) is exactly equal to eq. (1.1) for the bound state because in the former the integration on time gives terms of the form $P/(W - E_P - E_{P'})$ (P means principal value), while in the latter one gets terms $1/(W - E_P - E_{P'} + i\eta)$. Since $W < E_P + E_{P'}$ there is no difference between the two. We shall see later the reason of our choice.

Inserting this expression in eq. (2) and integrating by parts one gets

$$(5) \quad V(t)\Phi(t) = \left[1 - i \int_{-\infty}^{+\infty} \eta H(t') V(t') \varepsilon(t-t') dt' \right] \Phi(t) + \\ + i \int_{-\infty}^t dt' \left\{ \int_{-\infty}^{t'} dt'' \eta H(t'') V(t'') \right\} \frac{d}{dt'} \Phi(t') - i \int_t^{+\infty} dt' \left\{ \int_t^{t'} \eta H(t'') V(t'') \right\} \frac{d}{dt'} \Phi(t').$$

The first assumption referred to above consists in neglecting the time derivative of $\Phi(t)$ in eq. (5) ⁽¹¹⁾. Thus the equation for $V(t)$ is

$$(6) \quad V(t) = 1 - i \int_{-\infty}^{-\infty} \eta H(t_1) V(t_1) \varepsilon(t-t_1) dt_1,$$

$$(7) \quad (1 - \eta) V(t) = 1 - \eta.$$

We introduce the representatives of states with two free nucleons, denoting them shortly as \langle_a . Then eq. (3), with the help of eq. (6) becomes

$$(8) \quad \langle_a \Phi(t) = -i \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_b \langle_a H(t_1) V(t_1) \rangle_b \langle_b \Phi(t_1) \varepsilon(t-t_1) dt_1.$$

This is the compact form of the two body non adiabatic integral equation. Let us consider

$$(9) \quad W = \int_{-\infty}^{+\infty} H(t) V(t) dt.$$

This operator connects states with equal energy.

In configuration space its matrix elements, when the nucleon recoils are neglected, are of the form

$$(10) \quad W(r, r') = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle r | H(t_1) V(t_1) | r' \rangle dt_1 = \delta(r-r') w(r)$$

⁽¹¹⁾ The time variation of $\Phi(t)$ is much slower than that of any component of $\Psi(t)$. This corresponds in the usual time independent theory to neglect $(W - E_p - E_p')$ in comparison with all other energy denominators.

$w(r)$ is the required Lévy-Klein adiabatic potential when $V(t)$ is obtained by the iteration of eq. (6). The reason of our choice for eq. (1) is now apparent: we need an expression for the adiabatic potential W in a form explicitly hermitian.

The potential (9) contains also all sorts of divergent contributions corresponding to radiative processes. Following Lévy and Klein we will disregard for the time being these contributions: nevertheless we notice that the covariant form of all the operators introduced is appropriate for an investigation of the divergences.

3. — The variational principle.

We will produce now a variational principle for W , showing that this quantity is stationary for small arbitrary variations of $V(t)$. The procedure follows closely the formalism of LIPPMANN and SCHWINGER ⁽¹²⁾ for the K reaction operator.

The analogous of eq. (1.42) of reference ⁽¹²⁾ is

$$(11) \quad W' = \int_{-\infty}^{+\infty} [V^*(t)H(t) + H(t)V(t)] dt - \int_{-\infty}^{+\infty} V^*(t)H(t)V(t) dt + \\ + i \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} dt' V^*(t)H(t)\eta H(t')V(t')\varepsilon(t-t').$$

It is easy to verify that in eq. (11) W' is stationary and equal to W for $V(t)$ satisfying eq. (6).

We shall introduce the following operator as « trial function »,

$$(12) \quad V(t) = 1 + V(t)A_1 + V_2(t)A_2 + \dots + V_n(t)A_n,$$

where

$$(13) \quad V_n(t) = (-i)^n \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} dt_n \eta H(t_1)\eta \dots \eta H(t_n)\varepsilon(t-t_1)\varepsilon(t_1-t_2) \dots \varepsilon(t_{n-1}-t_n).$$

The A_i are time independent operators which will be determined in order to make W' stationary. The first term in expansion (12) is kept equal to 1 in order to satisfy eq. (7). The introduction of the « trial functions » in

⁽¹²⁾ B. A. LIPPMANN and J. SCHWINGER: *Phys. Rev.*, **79**, 469 (1950); see also M. CINI and L. A. RADICATI: *Nuovo Cimento*, **7**, 905 (1950).

eq. (11) gives for W' the following quadratic form:

$$(14) \quad W' = W_2 + \sum_{i=1}^n \left\{ A_i^* W_{i+2} + W_{i+2} A_i - \sum_{l=1}^n A_i^* (W_{i+l+1} - W_{i+l+2}) A_l \right\},$$

where

$$(15) \quad W_i = (-i)^{i-1} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} dt_i H(t_1) \eta \dots \eta H(t_i) \varepsilon(t_1 - t_2) \dots \varepsilon(t_{i-1} - t_i).$$

The variation of eq. (13) yields the following equations

$$(16) \quad W_{i+2} = \sum_{l=1}^n (W_{i+l+1} - W_{i+l+2}) A_l, \quad 1 \leq i \leq n$$

$$(16') \quad W_{i+2} = \sum_{l=1}^n A_l^* (W_{i+l+1} - W_{i+l+2}).$$

Since the operators W_i are hermitian, eq. (16') is simply the complex conjugate of eq. (16). The stationary value of W is then

$$(17) \quad W = W_2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n A_i^* W_{i+2} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n W_{i+2} A_i.$$

We notice that at all stages of approximation W remains hermitian. As a consequence of eq. (10) all the operators W_i are simultaneously diagonal⁽¹³⁾ in the configuration space of the two nucleons, and obviously all the W_i with odd i vanish. The system (16) and eq. (17) become

$$(18) \quad \langle r | W_{i+2} | r' \rangle = \sum_{l=1}^n \int \langle r | W_{i+l+1} - W_{i+l+2} | r'' \rangle \langle r'' | A_l | r' \rangle dr'',$$

$$(19) \quad \langle r | W | r' \rangle = \langle r | W_2 | r' \rangle + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int \langle r | A_i^* | r'' \rangle \langle r'' | W_{i+2} | r' \rangle dr'' + \text{c. c.}$$

With the help of eq. (10) we obtain that

$$\langle r'' | A_l | r' \rangle = \lambda_l(r') \delta(r' - r'')$$

(13) Strictly speaking the $w_i(r)$ are still operators in the spin space. Reasons of invariance restrict greatly the possible spin dependence (L. EISENBUD and E. WIGNER: *Proc. Nat. Acad. Wash.*, **27**, 281 (1941)) and it is easy to see that a representation may be found in which all the $w_i(r)$ are simultaneously diagonal.

where the suffix (m) explicitly introduced stresses the order of approximation for w . The quantities $P_j^{(m)}$ and $Q_j^{(m)}$ are defined in the following way. Let us introduce the rectangular matrix $Q^{(m)}$ with m columns and $m+1$ rows with elements

$$(24) \quad q_{ij} = u_{2i+2j+4} \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq m+1,$$

We define $Q_j^{(m)}$ as the determinant obtained by canceling in $Q^{(m)}$ the j -th row, taken with the sign $(-1)^{j+1}$. Furthermore we define

$$(25) \quad P_j^{(m)} = \sum_{k=1}^{m+s+2} u_{2k} Q_{k+s-1}^{(m)}.$$

The first approximation given by eq. (23) is

$$(26) \quad w^{(1)} = g^2 u_2 + g^4 u_4 \frac{u_4}{u_4 - g^2 u_6}.$$

It is clear that for large g^2 the difference from the Lévy-Klein potential $g^2 u_2 + g^4 u_4$ may be quite significant.

4. - Discussion.

Our method gives an approximation to $w(r)$ by means of a sequence of fractions of polynomials in g^2 . It is worthwhile to notice that the approximation is not a ratio of two series, because all the coefficients $Q_j^{(m)}$ and $P_j^{(m)}$ change at each order. It is well known that in this way it is possible to represent a much wider class of functions of g . As an example it is easy to show that the sequence converges for arbitrary values of g if w is supposed to be a meromorphic function of g ⁽¹⁵⁾.

In any case the convergence of the sequence does not depend on the magnitude of g , but only on the sequence

$$u_2, \quad u_4, \quad \dots, \quad u_{2n}, \quad \dots$$

determined only by the nature of the interacting fields.

For values of g for which the power series

$$(27) \quad g^2 u_2 + g^4 u_4 + \dots + g^{2n} u_{2n} + \dots,$$

⁽¹⁵⁾ It is trivial that if the function is rational the exact value is already obtained by the approximation of an appropriate order.

converges, the limit of our sequence coincides with the limit of the series (26). The fact that the present approximation, deduced from a variational principle, yields an analytic continuation of the power series (26) for values of g^2 outside of its radius of convergence, may be considered as an argument in favour of the reliability of the method.

It may be noticed that our choice of the λ , determined in order to make W' stationary is certain much better than the choice $\lambda_2 = \lambda_4 = \dots = \lambda_{2m} = 1$, leading to the Lévy-Klein potential.

The application of the present method to scattering problems, including the contributions of radiative corrections is being studied. Preliminary results show that for the pion-nucleon scattering our first approximation gives results analogous to those obtained by solving the Tamm-Dancoff integral equation by means of a variational method.

The authors wish to thank Prof. G. WATAGHIN for his kind interest in the work.

RIASSUNTO

Si fornisce un metodo di approssimazioni successive per il calcolo del potenziale adiabatico tra due nucleoni fissi, nel quale ad ogni stadio si tiene conto di un numero limitato di mesoni e di coppie. Il metodo, facendo uso di un principio variazionale nel quale si rende stazionario il potenziale adiabatico, fornisce un'approssimazione di questo come successione di frazioni di polinomi in g^2 , i cui coefficienti contengono solo i potenziali calcolati da LÉVY e KLEIN con metodo perturbativo. La convergenza di questa successione non dipende dalla grandezza della costante di accoppiamento e il suo limite, se esiste, rappresenta il prolungamento analitico della serie di potenze in g^2 al di fuori del suo cerchio di convergenza.

Eccitazione dei nuclei per assorbimento dei mesoni π^- .

II. Risultati e conclusioni.

V. DE SABBATA, E. MANARESI e G. PUPPI

Istituto di Fisica dell'Università - Bologna

Istituto Nazionale di Fisica Nucleare - Sezione di Padova

(ricevuto il 21 Ottobre 1953)

Riassunto. — Nel presente lavoro si completa una ricerca sull'assorbimento dei mesoni π^- , legati nell'orbita K da parte dei nuclei medio-pesanti ($A=100$). Il problema viene trattato col metodo di Montecarlo, ed i risultati confrontati con l'esperienza. Distribuzione delle stelle in funzione del numero dei rami visibili, percentuale dei protoni veloci ($E > 30$ MeV), rapporto di emissione particelle α /protoni, percentuale delle catture senza rami visibili, sono in accordo con i dati sperimentali se si suppone che l'atto primario di assorbimento, in seno alla materia nucleare, sia compiuto da una coppia protone-neutrone. Ricordando i risultati della cattura dei mesoni π in volo da parte dei nuclei si potrebbe tentare di concludere che la cattura dei π in seno alla materia nucleare a tutte le energie (almeno fino a 100 MeV) avviene essenzialmente da parte di una coppia protone-neutrone.

Introduzione.

In un precedente lavoro ⁽¹⁾ abbiamo discusso, nelle sue linee generali, il problema della eccitazione di un nucleo pesante delle lastre, a seguito della cattura di un mesone π^- legato nell'orbita più profonda. Avevamo fatto la ipotesi semplice che il mesone fosse catturato da una coppia di nucleoni, cosicchè il risultato netto dell'assorbimento si poteva riassumere nel fatto che da un punto interno del nucleo partivano due nucleoni veloci, all'incirca nella stessa direzione ma in versi opposti.

Avevamo distinto due fasi essenziali del processo ⁽²⁾, delle quali una fase

⁽¹⁾ G. PUPPI, V. DE SABBATA e E. MANARESI: *Nuovo Cimento*, **9**, 726 (1952).

⁽²⁾ R. SERBER: *Phys. Rev.*, **75**, 1508 (1949).

istantanea in cui i nucleoni veloci, originati dall'assorbimento del mesone, attraversano la materia nucleare generando per urto dei secondari veloci e costituendo così, ciascun nucleone primario coi suoi secondari una piccola valanghetta di nucleoni. Avevamo seguito il destino di questi nucleoni fino a che essi raggiungono la superficie del nucleo dove in parte vengono riflessi, e in parte fuoriescono. I nucleoni emessi in questa fase sono generalmente detti nucleoni di knock-on, e trasportano con sé circa $2/3$ della energia globale di eccitazione. L'energia delle particelle che non escono immediatamente, si può immaginare che venga distribuita rapidamente a tutti i componenti del nucleo ed emessa nella seconda fase del processo, più propriamente detta di evaporazione.

Avevamo discusso le ragioni teoriche che giustificano la schematizzazione del processo globale in due fasi. Un esame teorico ⁽³⁾ della fase transitoria tra le due ha sostanzialmente confermato l'assunto.

Nel presente lavoro discuteremo i dettagli del calcolo delle due fasi del processo, per entrambe condotto col metodo di Montecarlo, e dal confronto con i dati sperimentali disponibili vedremo quali conclusioni e riprove si possono trarre sul modello impiegato.

PARTE I.

FASE ISTANTANEA DEL PROCESSO

1. - Punto di cattura del mesone π^- .

Abbiamo supposto, per questo processo, che la cattura avvenga mentre il mesone si trova in uno stato legato, e precisamente nello stato più profondo, e che le forze responsabili del legame siano solo le forze coulombiane. Questo significa, in altre parole, che consideriamo la perturbazione dovuta alle forze nucleari, responsabili dell'assorbimento del mesone, come piccola, come si può vedere in realtà. Abbiamo pertanto considerato il mesone, legato da forze coulombiane come una particella e lo abbiamo descritto quindi con una equazione di Schrödinger ordinaria.

Come potenziale si è preso, come di consueto, il potenziale di Thomson per l'interno

$$V = -\frac{Ze^2}{R} \left[\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left(-\frac{r}{R} \right)^2 \right],$$

dove con R si è indicato il raggio del nucleo.

⁽³⁾ A. KIND: *Nuovo Cimento*, **10**, 176 (1953).

Impiegare il modello di Thomson, che alla superficie del nucleo si raccorda col potenziale coulombiano puro con continuità, significa naturalmente considerare che la densità di carica positiva nel nucleo sia costante, e per di più che improvvisamente tale densità alla superficie del nucleo cada al valore zero. In altre parole la densità della carica positiva, e con essa la densità dei protoni, e con essa, ancora più in generale, la densità della materia nucleare ha, in questo modello, una discontinuità alla superficie del nucleo per cui passa da un valore zero ad un valore costante. È evidente che la unica ragione che consiglia l'uso di tale modello è la sua semplicità, e un poco forse il fatto che per cambiarlo si desidererebbe poterlo fare in base ad una concreta conoscenza dell'andamento della densità dei protoni e dei neutroni nel nucleo, su cui si hanno invece soltanto delle indicazioni teoriche ⁽⁴⁾.

Il problema ha un notevole interesse soprattutto per la definizione della barriera coulombiana presentata dal nucleo quando una particella carica tenta di entrarvi o di uscirvi. Quello che si può dire, dal confronto dei risultati ottenuti con distribuzioni continue di densità di carica positiva, è che il modello di Thomson è un modello estremo e che le barriere calcolate con distribuzioni continue sono tutte inferiori a quelle calcolate col Thomson, a parità di altri parametri. Per lo scopo del presente lavoro non abbiamo ritenuto necessario allontanarci dal modello convenzionale, pur sapendo di trattare un caso ideale, le cui previsioni, però, non si discostano tanto da quelle degli altri modelli da alterare le conclusioni. D'altra parte, l'uso del modello di Thomson era richiesto anche da ragioni di coerenza, avendo poi descritto l'insieme dei nucleoni, nei riguardi delle forze nucleari, come un gas di Fermi racchiuso in una buca di potenziale di raggio pari al raggio nucleare, ed essendo sempre opportuno l'uso di un modello definito agli effetti della critica dei risultati. Con le ipotesi fatte dunque, la autofunzione del mesone legato nello stato fondamentale si può scrivere come

$$R(r) = \frac{1}{\mathcal{N}} \frac{\exp[-\frac{1}{2}ar^2]}{r}, \quad a = \sqrt{\frac{\mu Z e^2}{\hbar^2 E^3}} \quad (\mu = \text{massa del mesone}),$$

ed è praticamente contenuta entro il nucleo. Infatti, l'autofunzione del mesone si può ricondurre a quella di un oscillatore nello stato fondamentale, la cui escursione, classica, è circa 1/3 del raggio nucleare. Poichè nel nostro problema quello che interessa è trovare le probabilità relative di cattura delle varie zone del nucleo, la autofunzione globale deve essere normalizzata sul volume del nucleo e cioè

$$\frac{4\pi}{\mathcal{N}^2} \int_0^R \exp[-ar^2] dr = 1.$$

(4) L. ROSENFELD: *Nuclear Forces* (Amsterdam, 1948), p. 242.

Data la simmetria del problema è conveniente suddividere il nucleo in tante intercapedini individuate dai raggi delle superficie sferiche concentriche che le racchiudono. Se diciamo N il numero delle intercapedini, e vogliamo che a tutte le intercapedini corrisponda la stessa probabilità di presenza (e quindi la stessa probabilità di cattura), dovremo porre la condizione, indicando con r_n il raggio della n -ma superficie sferica,

$$4\pi \int_{r_n}^{r_{n+1}} R(r)^2 r^2 dr = \frac{1}{N}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, 9.$$

Noi abbiamo preso $N=10$ ed abbiamo scelto a rappresentare i punti di cattura per ogni intercapedine un valore di r intermedio tra i raggi delle superficie sferiche che la racchiudono. Nella tabella I sono riportati i 10 valori che individuano le distanze del punto di cattura dal centro del nucleo.

TABELLA I.

| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| (r/R) | 0,303 | 0,439 | 0,536 | 0,615 | 0,684 | 0,746 | 0,804 | 0,861 | 0,917 | 0,972 |

2. - Modalità della cattura.

Poichè il modello nucleare da noi tentato è, come già accennato, quello del gas di Fermi, e poichè il minimo numero di nucleoni che possono intervenire nel processo di cattura del mesone, per la conservazione dell'energia e dell'impulso è due, abbiamo trattato due casi distinti in cui il mesone è assorbito da una coppia protone-neutrone (P-N) oppure da una coppia protone-protone (P-P); naturalmente, nel modello adottato la probabilità che due nucleoni si trovino in un certo elemento di volume, entro il raggio di azione delle forze nucleari, è retta dalla legge del caso, e così si può parimenti dire a proposito dell'impulso degli stessi nucleoni. Così, la probabilità che uno dei due nucleoni che assorbono abbia un certo impulso dipende unicamente dalla distribuzione degli impulsi in un gas di Fermi degenerato. Con questo si viene a dire che la probabilità che due nucleoni, correlati spazialmente, assorbano il mesone non dipende dallo stato di moto dei due nucleoni. Comunque, per trovare le caratteristiche della distribuzione degli impulsi bisogna calcolare l'impulso massimo per i neutroni e per i protoni dati dalle relazioni ben note ⁽⁵⁾

$$P_{0N} = \frac{(9\pi)^{1/3} \hbar}{2r_0} \left(\frac{2N}{A} \right)^{1/3}, \quad P_{0p} = \frac{(9\pi)^{1/3} \hbar}{2r_0} \left(\frac{2Z}{A} \right)^{1/3}.$$

(5) L. ROSENFELD: *Nuclear Forces* (Amsterdam, 1948), p. 192.

A conti fatti, per questi impulsi massimi si ottengono rispettivamente delle energie massime di 26 MeV e 22 MeV circa. Assumendo come energia di legame dell'ultimo nucleone il consueto 8 MeV, risulta che le buche di potenziale in cui debbono essere rinchiusi questi due gas degeneri, rispettivamente di neutroni e di protoni, hanno profondità di 34 MeV e di 30 MeV. Questo modello nucleare a due buche di differente profondità porta come conseguenza che i neutroni sono leggermente più caldi dei protoni, ma la differenza è molto modesta. La probabilità che un nucleone abbia un impulso di modulo compreso tra p e $p + dp$ e direzione e verso compresi nell'angolo solido infinitesimo $d\Omega$ rispetto ad un riferimento arbitrario è pertanto

$$dQ = \frac{3p^2 dp}{P_0^3} \cdot \frac{d\Omega}{4\pi}.$$

L'espressione scritta è identica a quella dell'elemento di volume infinitesimo di una sfera unitaria; si può così pensare di rappresentare l'insieme degli impulsi in una sfera in modo tale che il rapporto tra un volumetto elementare e il volume totale misuri anche la probabilità che l'estremo di un vettore impulso spiccato dal centro cada nel volumetto in parola. Noi abbiamo diviso la sfera di Fermi in tante cellette (10 000) a mezzo delle seguenti condizioni:

$$\frac{3}{P_0^3} \int_{P_k}^{P_{k+1}} p^2 dp = \frac{1}{N_p}, \quad \frac{1}{2} \int_{\vartheta_k}^{\vartheta_{k+1}} \sin \vartheta d\vartheta = \frac{1}{N_\vartheta}, \quad \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi_k}^{\varphi_{k+1}} d\varphi = \frac{1}{N_\varphi}.$$

Con $N_p = 10$, $N_\vartheta = 25$, $N_\varphi = 40$ $N_p N_\vartheta N_\varphi = 10.000$.

Il fatto che l'estremo di un vettore impulso cada in una o in un'altra celletta è regolato puramente dal caso e le cellette sono dello stesso volume e pertanto rappresentano casi equiprobabili.

Supponiamo ora di conoscere gli impulsi dei due nucleoni che assorbono e diciamoli rispettivamente \mathbf{p}_1 e \mathbf{p}_2 . Dopo aver assorbito il mesone, ed essersene divisa la energia totale, che, considerando la energia cinetica trascurabile, si può confondere con la sua energia di riposo, i due nucleoni ripartono con due nuovi impulsi \mathbf{p}'_1 e \mathbf{p}'_2 che in approssimazione non relativistica si possono calcolare a partire dalle ovvie relazioni di conservazione seguenti (M = massa del nucleone):

$$\mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2, \quad p_1'^2 + p_2'^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2Mc^2.$$

È opportuno introdurre un vettore ausiliario \mathbf{K} legato agli impulsi dalle relazioni:

$$\mathbf{p}'_1 = \mathbf{p}_1 + \mathbf{K}, \quad \mathbf{p}'_2 = \mathbf{p}_2 - \mathbf{K}.$$

Se diciamo ϑ_1 e ϑ_2 gli angoli formati dai vettori \mathbf{p}_1 e \mathbf{p}_2 con la direzione orientata di \mathbf{K} , avremo ancora:

$$p_1'^2 = p_1^2 + K^2 + 2p_1K \cos \vartheta_1,$$

$$p_2'^2 = p_2^2 + K^2 - 2p_2K \cos \vartheta_2,$$

e quindi in definitiva:

$$K^2 + \\ + K(p_1 \cos \vartheta_1 - p_2 \cos \vartheta_2) = M\mu c^2.$$

Come si vede nella scelta di \mathbf{K} c'è della arbitrarietà e si può farne l'oggetto di una estrazione a caso, come diremo più avanti. Noti \mathbf{p}_1' e \mathbf{p}_2' possiamo considerare concluso il processo di cattura, e dobbiamo occuparci di quello che accade mentre questi due nucleoni veloci, originati dalla cattura, attraversano la materia nucleare, dal punto di cattura fino alla periferia del nucleo. La fig. 1 mostra la distribuzione energetica in seno alla materia nucleare dei nucleoni originati dall'assorbimento, indipendentemente dalla loro carica; per confronto è riportata anche la distribuzione energetica della materia nucleare ordinaria, cioè prima dell'assorbimento.

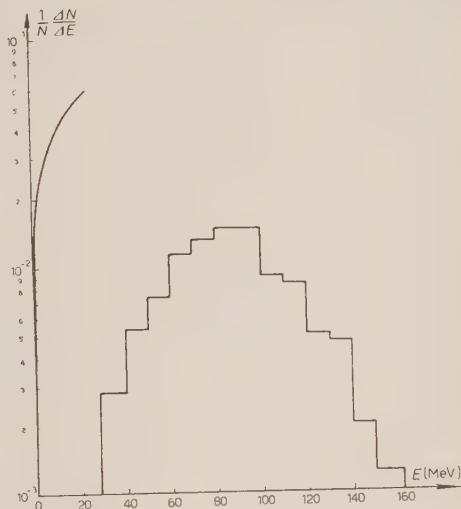


Fig. 1. - Distribuzione energetica dei nucleoni che hanno catturato il π^- .

3. - Eccitazione del nucleo.

Come già spiegato, dal punto di cattura partono due neutroni, oppure un neutrone e un protone, a seconda del tipo di coppia che ha assorbito, di direzione, verso ed energia nota. Attraversando la materia nucleare, essi interagiranno con questa scambiando energia, e precisamente cedendo energia, dato che la materia nucleare incontrata è fredda, cioè i nucleoni incontrati occupano i più bassi stati di traslazione del gas di Fermi. Coerentemente col nostro modello, e come già ampiamente discusso in ⁽¹⁾, tratteremo le interazioni con la materia nucleare come una successione di urti tra due particelle le cui modalità sono regolate dalle ben note sezioni d'urto protone-neutrone e protone-protone, ed ammetteremo che la sezione d'urto neutrone-neutrone sia identica a quella protone-protone. In fig. 2 sono riportate le sezioni d'urto integrali

che sono state impiegate per questo lavoro ⁽⁶⁾. La sezione d'urto differenziale nel centro di massa protone-protone e neutrone-neutrone è stata considerata isotropa a tutte le energie che interessano, e la sezione d'urto protone-neutrone ⁽⁷⁾, invece, di andamento parabolico in $\cos \vartheta$, e precisamente del tipo

$$\sigma(\vartheta) = a + b \cos^2 \vartheta ;$$

a e b risultano funzioni della energia e si possono facilmente determinare dal valore delle sezioni d'urto sperimentali a 90° e a 180° . Fissati questi valori a tre energie, come riportato in tabella II, per energie intermedie si è interpolato.

Fissiamo ora l'attenzione su uno dei nucleoni veloci che partono dalla cattura; la prima cosa da fare sarà quella di definirne il cammino libero medio in materia nucleare, e questo si può fare in base alla conoscenza delle sezioni d'urto e

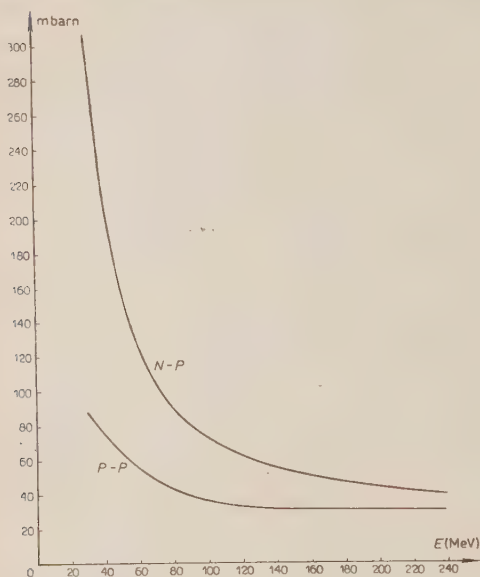


Fig. 2. - Sezioni d'urto totali.

della densità della materia nucleare. Vi è ancora da dire, però, che le sezioni d'urto riportate si riferiscono ad urto di particelle veloci contro particelle ferme, mentre nel caso presente le particelle incontrate sono in moto.

TABELLA II.

| E (MeV) | 40 | 90 | 260 |
|-----------------|----|-----|-----|
| a (mb/sterad) | 11 | 2,8 | 0,5 |
| b (mb/sterad) | 8 | 9,5 | 7,5 |

Poichè, però, nell'intervallo energetico che ci interessa le sezioni d'urto integrali hanno approssimativamente una dipendenza dalla energia del tipo $1/E$,

⁽⁶⁾ J. DE JUREN e B. J. MOYER: *Phys. Rev.*, **81**, 919 (1951); R. W. BIRGE: *Phys. Rev.*, **80**, 490 (1950); R. W. BIRGE, U. E. KRUSE e N. F. RAMSEY: *Phys. Rev.*, **83**, 274 (1951),

⁽⁷⁾ E. KELLY, C. LEITH, E. SEGRÈ e C. WIEGAND: *Phys. Rev.*, **79**, 96 (1950).

le sezioni d'urto mediate sulla sfera di Fermi forniscono, in approssimazione non relativistica, lo stesso valore che si ottiene non tenendo conto del moto dei nucleoni urtati. Dette pertanto σ_{NN} e σ_{pN} le dette sezioni d'urto integrali, possiamo definire il cammino libero medio in materia nucleare nel modo convenzionale:

$$\frac{1}{\lambda_N} = \frac{1}{\lambda_{NP}} + \frac{1}{\lambda_{NN}} = \varrho_N \sigma_{NN} + \varrho_P \sigma_{NP}, \quad \frac{1}{\lambda_P} = \frac{1}{\lambda_{PP}} + \frac{1}{\lambda_{PN}} = \varrho_P \sigma_{PP} + \varrho_N \sigma_{PN}.$$

Agli effetti del Montecarlo è opportuno suddividere il percorso del nucleone in tanti intervalli di lunghezze tali per cui in ciascuno di essi si abbia la stessa probabilità a priori di una collisione. Si vede immediatamente che, detto N il numero totale degli intervalli, ed essendo $\exp[-x/\lambda]$ la probabilità che la collisione avvenga dopo un percorso x , la detta condizione di equiprobabilità si può scrivere nella forma:

$$\exp[-x_{n-1}/\lambda] - \exp[-x_n/\lambda] = 1/N.$$

Di qui si trae che la suddivisione è definita da certi punti di ascisse x_n , a partire dal punto di cattura, calcolabili dalla relazione

$$x_n = \lambda \ln \frac{N}{N-n}.$$

Ad individuare ogni intervallo, abbiamo al solito assunto un punto intermedio tra gli estremi. Questo serve a calcolare il punto in cui avviene la collisione; per sapere poi se la collisione del neutrone avviene contro un protone o contro un neutrone basta ricorrere ai rapporti λ_N/λ_{pN} , λ_N/λ_{NN} , ed analogamente per un protone urtante.

Supponiamo ora, di fissare che in un certo punto della sua traiettoria il nucleone proveniente dalla cattura, ad esempio un neutrone, ha urtato contro un protone. Bisogna sapere ora quale è l'impulso del nucleone urtato, passare al sistema di riferimento del centro di massa, fare una rotazione a caso dei vettori rappresentativi degli impulsi nel centro di massa, e ritornare nel sistema di riferimento iniziale. A questo scopo bisogna, come al solito, suddividere la sezione d'urto differenziale nel centro di massa in intervalli equiprobabili, che poi andranno sorteggiati, e questo si può realizzare con la condizione

$$\frac{2\pi}{\sigma} \int_{\vartheta_k}^{\vartheta_{k+1}} \sigma(\vartheta) \sin \vartheta \, d\vartheta = \frac{1}{N}.$$

Quando si ritorna, dopo avvenuta la diffusione nel centro di massa, al sistema di riferimento iniziale, può accadere che uno degli impulsi finali cada

dentro la sfera di Fermi, cioè si riferisca ad uno stato di traslazione già occupato; poichè questo è proibito dal principio di esclusione, in questo caso dovremo considerare che l'urto non sia avvenuto, perchè proibito, e far continuare al nucleone veloce la sua corsa. Ancora una osservazione a proposito della scelta dell'impulso del nucleone urtato: l'approssimazione da noi usata è stata quella di sceglierlo tra uno dei possibili valori all'interno della sfera di Fermi, mentre in realtà, dato che la sezione d'urto contiene il fattore

$$(\mathbf{v}_{\text{inc}} - \mathbf{v}_{\text{urt}}),$$

sarebbe più giusto sceglierlo in una distribuzione deformata, essendo relativamente più probabile l'urto contro un nucleone di verso contrario che contro uno di verso concorde. Sta di fatto, però, che la dipendenza della sezione d'urto dalla energia è tale da compensare largamente questo fattore, così che la nostra approssimazione, fino a che è valida approssimativamente la legge $1/E$ per le sezioni d'urto integrali, può ritenersi soddisfacente.

Se l'urto è permesso, da esso hanno origine due nucleoni più veloci dei nucleoni che formano la materia nucleare ordinaria e di cui bisogna seguire l'ulteriore destino attraverso i successivi urti, che si trattano con le modalità specificate dianzi: da ogni nucleone proveniente dalla cattura ha quindi origine in materia nucleare una valanghetta di nucleoni che bisogna seguire fino alla superficie del nucleo. Qui giunti, i nucleoni che compongono la valanghetta subiscono varia sorte. I neutroni che hanno energia superiore sì alla energia massima della sfera di Fermi, ma per una quantità inferiore ad 8 MeV vengono senz'altro riflessi, i protoni, a causa della barriera coulombiana, vengono praticamente sempre riflessi se l'energia non supera il valore massimo della sfera di Fermi di 13 MeV.

Nello svolgimento del Montecarlo, quando un nucleone cadeva in questo intervallo energetico veniva abbandonato e considerato catturato definitivamente, senza seguirne il destino fin proprio alla superficie del nucleo. I nucleoni invece che giungono alla superficie del nucleo con energia cinetica superiore, rispettivamente a 34 MeV per i neutroni e a 35 MeV per i protoni hanno una certa probabilità di essere riflessi ed una certa probabilità di fuoriuscire con energia ridotta, pari alla somma algebrica della energia cinetica e della energia potenziale. Per i neutroni abbiamo calcolato la probabilità di trasmissione per il cambio di lunghezza d'onda tra l'interno e l'esterno del nucleo, con la formula ben nota

$$(1) \quad T_n = \frac{4kK}{(k + K)^2},$$

ove k e K sono rispettivamente i numeri d'onda all'interno e all'esterno del

nucleo e legati alla energia dalle relazioni:

$$k = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2ME}, \quad K = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2M(E - V)},$$

(dove $-V$ è la profondità della buca).

Per i protoni bisogna tener conto della barriera coulombiana, e perciò abbiamo impiegato per il coefficiente di trasmissione la formola composta ⁽⁸⁾

$$(2) \quad T_p = \frac{4kK}{(k+K)} \cdot \exp \left[-\frac{2Ze^2}{\hbar v_e} (2W - \sin 2W) \right],$$

ove il primo fattore rappresenta il coefficiente di trasmissione dovuto al cambio di lunghezza d'onda, come per i neutroni, mentre il secondo rappresenta la probabilità di passaggio della barriera, calcolato col metodo di W.K.B.. Al solito i simboli hanno il significato convenzionale e W rappresenta il rapporto R_i/R_e tra il raggio interno e il raggio esterno della barriera, come segnato in fig. 3). Tutti i parametri sono funzioni della energia e i risultati sono stati tabulati e messi in grafico.

Abbiamo ora tutti gli elementi per descrivere come si è in effetti proceduto col metodo di Montecarlo.

4. - Organizzazione del Montecarlo.

L'uso del metodo di Montecarlo, nei più svariati problemi, si è andato diffondendo negli ultimi anni, come lo testimonia la già ricca letteratura in proposito. Esso consta sostanzialmente nella costruzione di un certo numero di possibili esemplari del fenomeno che interessa, quando questo fenomeno sia il risultato di una successione, non troppo numerosa, di processi elementari, perfettamente noti ed indipendenti l'uno dall'altro. Il numero degli esemplari deve essere sufficientemente elevato da permettere di rilevarne i risultati statistici, che debbono essere confrontati con i risultati statistici di un adeguato numero di casi effettivi. Il fenomeno in esame, della eccitazione dei nuclei per assorbimento di un mesone π si presta a questo trattamento, purchè non vi sia luogo a dubitare che il modello impiegato cada in difetto. Il modello, come abbiamo già accennato, riduce le interazioni in materia nucleare ad una

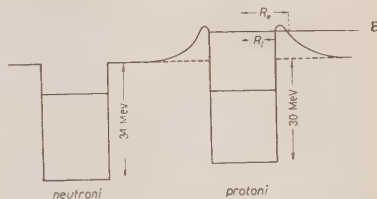


Fig. 3. Buche di potenziale.

⁽⁸⁾ I. M. BLATT e V. F. WEISSKOPF: *Theoretical Nuclear Physics* (1952); G. BERNARDINI, E. T. BOOTH e S. J. LINDENBAUM: *Phys. Rev.*, **83**, 669 (1951).

successione di urti nucleone-nucleone, trattati come gli urti tra due nucleoni isolati ⁽⁹⁾, salvo le conseguenze del principio di Pauli. Questo è solo un modello approssimato, perchè, certamente, quando si considerano nucleoni di energia

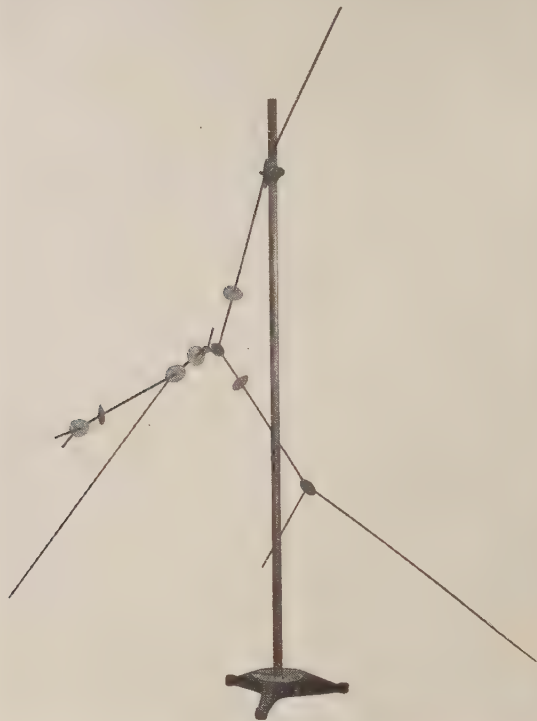


Fig. 4.

relativamente bassa, le forze a più corpi intervengono sensibilmente, ma è purtuttavia il migliore che si possa attualmente usare ed il più facile a trattare: vediamo dunque come lo si è organizzato. Il primo quesito che si pone è il punto di cattura del mesone π^- ; a tale scopo, come già detto, il nucleo è stato diviso in 10 intercapedini sferiche tali che in ciascuna di esse la probabilità a priori di cattura del mesone sia $1/10$. Si associa quindi a ciascuna intercapedine un numero dal 0 al 9, i 10 numeri si mettono in un'urna e se ne

⁽⁹⁾ M. L. GOLDBERG: *Phys. Rev.*, **74**, 1269 (1948).

estrae uno a caso. In realtà sono state impiegate tavole di numeri estratti a caso ⁽¹⁰⁾; a partire da un punto arbitrario di queste tabelle, fissiamo che la prima cifra dica in quale interapedine è stato catturato il mesone. Estratto questo e supponendo di trattare l'assorbimento da parte di coppia P-N, il secondo quesito che si pone è il sapere gli impulsi dei due nucleoni che assor-

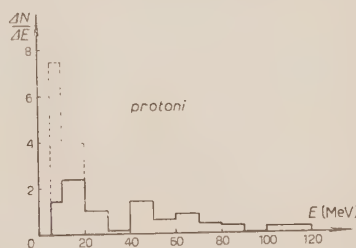
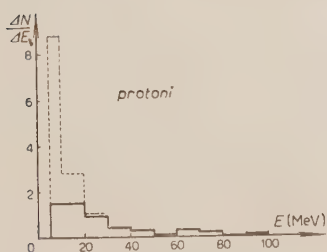
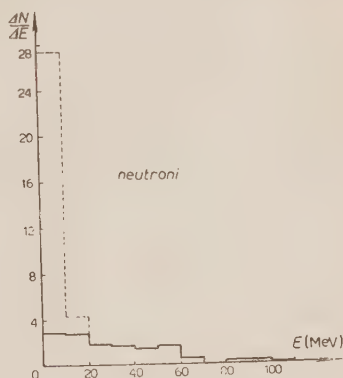
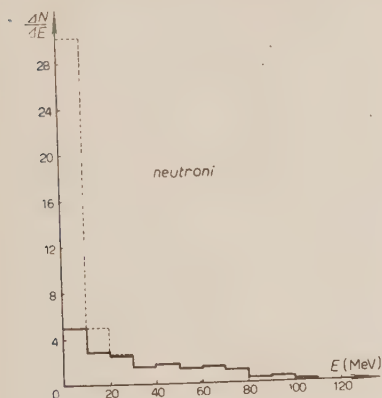


Fig. 5 a). - Cattura da parte di P-N.

Fig. 5 b). - Cattura da parte di P-P.

— Spettro dei neutroni e dei protoni di knock-on. ----- Spettro complessivo dell'evaporazione.

biranno il mesone. Per questo bisogna estrarre a sorte la celletta della sfera di Fermi in cui cade l'estremo del vettore impulso del protone, ed analogamente del neutrone. Poichè avevamo suddiviso il modulo dell'impulso in 10 intervalli, la seconda cifra a caso darà il modulo dell'impulso del protone; per l'orientamento, dato che avevamo suddiviso l'angolo ϑ in 25 parti e l'angolo φ in 40, occorre estrarre due cifre per ϑ e due cifre per φ . La identica operazione si fa per il neutrone; gli orientamenti si riferiscono ad un asse polare principale che coincide con un diametro del nucleo, e ad un piano passante per

⁽¹⁰⁾ M. G. KENDALL: *Tables of random sampling numbers* (Cambridge, 1951).

questo asse; ma per questa prima fase abbiamo trovato più conveniente riferire p_1 e p_2 al vettore ausiliario K , ed estrarre la orientazione di K rispetto all'asse polare principale e costruire le risultanti, dopo l'assorbimento, p'_1 e p'_2 . Questo ci permetteva di separare la prima fase del processo dal resto e di partire addirittura con la condizione dopo l'assorbimento. Per lo svolgimento ci siamo valse di due modelli meccanici: uno, fig. 4, rappresentante il nucleo, consisteva di un'asta verticale di lunghezza di 2 metri corrispondente al detto diametro del nucleo. La metà superiore di questa asta era suddivisa in 10 tratti rappresentanti i punti intermedi dei 10 intervalli equiprobabili di cattura. Uno scorrevole veniva fissato nel punto di cattura e su esso erano imperniate due aste orientabili a piacere che rappresentavano le direzioni dei due nucleoni veloci dopo la cattura. La modalità della cattura era invece risolta con un altro modellino meccanico a parte, che non descriveremo per brevità. Una volta sistemate nel modello le direzioni di moto dei due nucleoni si cominciava a seguirne uno e si estraeva a caso con la tecnica ormai nota il punto di collisione con un nucleone del nucleo e le direzioni di moto del nucleone urtante e di quello urtato dopo l'urto. Le traiettorie di queste asticelle venivano visualizzate in scala, essendo le aste, a cannocchiale, di lunghezza variabile, e provviste alle estremità di cerniere e goniometri. Era così possibile passo per passo visualizzare la traiettoria di tutti i nucleoni che entravano a far parte della valanghetta, fino alla periferia del nucleo. Quando accadeva che

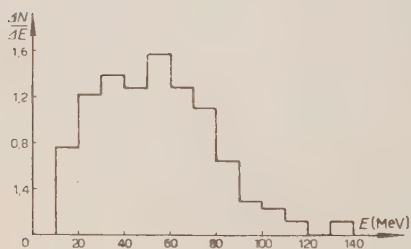


Fig. 6. - Energia residua.

un nucleone passasse, senza urtare ulteriormente, oltre la superficie del nucleo, allora si estraeva ancora a sorte, in base alla conoscenza del coefficiente di trasmissione T e di quello di riflessione $(1 - T)$ per quella data energia e per quel certo tipo di particella, se effettivamente la particella usciva o veniva riflessa. Un esemplare è completo quando di tutte le particelle costituenti le due valanghette se ne è seguita la sorte fino alla superficie, e i dati che si hanno a disposizione dopo questa prima fase del processo sono: tipo ed energia delle particelle che escono dal nucleo in questa fase istantanea, tipo del nucleo residuo e stato di eccitazione del nucleo. Questi risultati sono raccolti, per 100 catture PN e 100 catture PP nelle figure 5a, 5b, 6). Anche la distribuzione angolare delle particelle emesse istantaneamente si può ottenere da questi risultati, ma in questo lavoro non vi siamo particolarmente interessati. I risultati qui riportati sono sostanzialmente identici a quelli riferiti in I e basati su un numero di esemplari all'incirca metà; questa stabilità ci conforta a pensare che la statistica che presentiamo sia sufficientemente indicativa.

PARTE II.

FASE EVAPORATIVA DEL PROCESSO

1. - Nucleo residuo.

Come conclusione della prima fase del processo, abbiamo, come già detto, un gruppo di particelle uscite istantaneamente ed un gruppo di particelle riflesse alla superficie del nucleo, che rinunciamo a seguire nella loro ulteriore evoluzione entro il nucleo per le ragioni discusse in I, e che in breve tempo tendono a realizzare approssimativamente entro il nucleo una condizione di quasi equilibrio. Il nucleo così eccitato sarà trattato con i metodi della teoria evaporativa, ed i risultati globali confrontati coi risultati sperimentali. Nella prima fase del processo abbiamo trattato un nucleo ipotetico con $A = 100$ e $Z = 43$, che dovrebbe avere proprietà intermedie tra quelle dei nuclei pesanti (Br, Ag, I) delle lastre fotografiche. Avremmo dovuto, in realtà trattare separatamente i due casi del Br e del Ag (I entra solo in piccola percentuale) dato che questi nuclei hanno raggi sensibilmente differenti e precisamente nel rapporto 0,9 ed anche barriere coulombiane sensibilmente differenti e precisamente nel rapporto 0,82. Tenuto conto, però, che nella prima fase del processo intervengono solo proprietà che sono funzioni continue e monotone del numero di massa, la scelta di un nucleo intermedio non può alterare i risultati e si risolve in una notevole semplificazione del metodo, di per sé già abbastanza gravoso e lungo. Nella seconda fase del processo, invece, abbiamo pensato che non fosse più lecito ricorrere alla detta approssimazione ed abbiamo separato i processi iniziati nell'Ag da quelli iniziati nel Br. Abbiamo ripetuto per ogni nucleo residuo il processo di evaporazione, considerando il nucleo iniziale una volta Ag e una volta Br e stabilendo con una estrazione quale degli isotopi si dovesse per ogni caso, scegliere, conoscendo l'abbondanza isotopica. Caso per caso, dalla conoscenza del numero e tipo delle particelle emesse nella fase istaneanea e del tipo di nucleo che ha assorbito, è possibile immediatamente stabilire quale sia il particolare nucleo eccitato che inizia la evaporazione. Abbiamo ritenuto opportuno in questa seconda fase impiegare questi criteri per il fatto che le probabilità relative di evaporazione di un tipo piuttosto che un altro di particella (neutrone, protone, alfa) dipendono in maniera sensibile dal particolare tipo di nucleo che evapora, dal suo numero di massa, dal suo numero isotopico, e non sono senz'altro funzioni monotone del numero di massa. Non ci nascondiamo che l'aver trascurato la differenza tra Ag e Br nella prima fase, ed aver usato sempre uno stesso nucleo intermedio, ha alterato leggermente i risultati,

nel senso che se Ag e Br fossero stati tenuti distinti, all'Ag sarebbe in media rimasta un poco più di energia residua e al Br un poco meno che non all'ipotetico nucleo con $A=100$. Ma poichè alla fine i risultati vengono conglobati, è nostra impressione che gli eventuali scarti non siano tali da non essere a priori conglobabili nella stessa indefinizione dei parametri caratteristici dei nuclei, come il raggio e la barriera coulombiana, e la funzione di densità della materia nucleare, ecc..

2. - Processo evaporativo.

Per trattare il processo evaporativo si è fatto uso del modello termodinamico di Weisskopf, supponendo cioè che il nucleo eccitato emetta particelle il cui spettro energetico sia quello che deriva da una distribuzione energetica di un gas di Fermi a temperatura diversa da zero. Questa distribuzione energetica è data dalla

$$(3) \quad I(\varepsilon) d\varepsilon = \text{cost } Ag\varepsilon\sigma_c(\varepsilon)\omega(E - \varepsilon - B) d\varepsilon,$$

dove E è l'energia di eccitazione, ε quella della particella emessa, B l'energia di legame della particella evaporata; $E - \varepsilon - B$ rappresenta quindi l'energia residua d'eccitazione del nucleo d'arrivo; $\sigma_c(\varepsilon)$ è la sezione d'urto per il processo a ritroso e g è una costante che dà il numero degli stati di spin moltiplicato per la massa della particella evaporata: $\omega(E - \varepsilon - B)$ rappresenta la densità dei livelli energetici del nucleo di arrivo per intervallo unitario di energia:

$$(4) \quad \omega(E - \varepsilon - B) = \text{cost} \exp [2\sqrt{a(E - \varepsilon - B)}],$$

a è una costante determinata empiricamente in maniera che la (4) riproduca le nostre conoscenze sulla densità dei livelli energetici.

Noi abbiamo limitato le nostre considerazioni alla evaporazione di tre tipi di particelle: neutroni, protoni e particelle α perchè per altri raggruppamenti le probabilità di emissione sono trascurabili. Se fosse valida l'approssimazione geometrica classica, si dovrebbe prendere per i neutroni

$$\sigma_c(\varepsilon) = \pi R^2.$$

Nel caso dei protoni e delle particelle α si dovrebbe poi tener conto del potenziale coulombiano e i calcoli, sempre in approssimazione classica, darebbero

$$\sigma_c = \begin{cases} \pi R^2(1 - V(R)/\varepsilon) & \text{per } \varepsilon > V(R), \\ 0 & \text{per } \varepsilon < V(R), \end{cases}$$

dove $V(R)$ rappresenta l'altezza della barriera. In tal caso la (3) diventerebbe

$$(5) \quad I(\varepsilon) d\varepsilon = \text{cost } Ag[\varepsilon - V(R)] \exp[2\sqrt{a(E - \varepsilon - B)}] d\varepsilon.$$

Nella (5) però la barriera di potenziale figura come un ostacolo classico: in realtà bisognerà tener conto del fenomeno della trasparenza della barriera. Alcuni autori ⁽¹¹⁾ hanno tenuto conto di questo fatto riducendo opportunamente il valore dell'altezza della barriera $V(R)$ a un valore $V'(R) < V(R)$. Ad esempio, per un nucleo standard $A=100$ e $Z=43$ per cui $V_p(R) \sim 9$ MeV e $V_\alpha(R) \sim 18$ MeV, LE COUTEUR prende $V'_p(R) = 5$ MeV e $V'_\alpha(R) = 10$ MeV. Noi, anzichè fare uso della (5), abbiamo tenuto conto della barriera moltiplicando la (3) per il coefficiente di trasparenza della barriera; nel caso poi dei neutroni, la (3) si è moltiplicata per il coefficiente di trasmissione. La (1) perciò diviene

$$(6) \quad I_i(\varepsilon) d\varepsilon = AT_i g_i \varepsilon \exp[2\sqrt{a(E - \varepsilon - B)}] d\varepsilon \quad (i = n, p, \alpha),$$

con T_n , T_p e T_α date dalla (1) (2).

In questa seconda fase del processo, non ci siamo accontentati di partire da un nucleo intermedio fra quelli delle lastre, ma abbiamo fatto il calcolo esplicitamente per ogni nucleo residuo dal processo di knock-on e quindi per ogni nuovo nucleo che via via si fosse presentato in seguito alla evaporazione; e questo per tener conto dell'energia dello stato fondamentale del nucleo residuo, poichè evidentemente le probabilità relative di evaporazione dei neutroni, protoni e particelle α dipendono dalla energia dello stato fondamentale dei diversi nuclei di arrivo. Per questo, secondo il LE COUTEUR si è usata una formula semi-empirica che ci dà le energie degli stati fondamentali:

$$E_0(\vartheta) = -\alpha A + \beta A(\vartheta - \vartheta_e)^2;$$

ϑ_e è il valore di ϑ per il nucleo più stabile N_e , Z_e di massa A ed è molto bene rappresentato dalla formula empirica

$$\vartheta_e = \frac{A^{2/3}}{(A^{2/3} + 131)},$$

mentre $\vartheta = (N - Z)/A$.

α e β sono delle costanti determinate empiricamente.

Si ha

$$\frac{\partial E_0(N, Z)}{\partial N} = -\alpha + 2\beta_n(\vartheta - \vartheta_e),$$

$$\frac{\partial E_0(N, Z)}{\partial Z} = -\alpha + 2\beta_p(\vartheta - \vartheta_e),$$

(11) K. J. LE COUTEUR: *Proc. Phys. Soc. London*, A **63**, 259 (1950).

con

$$\beta_n = \beta \left(1 - A \frac{d\vartheta_e}{dA} + \frac{\vartheta + \vartheta_e}{2} \right),$$

$$\beta_p = \beta \left(1 + A \frac{d\vartheta_e}{dA} + \frac{\vartheta + \vartheta_e}{2} \right).$$

Se allora un nucleo a con una energia d'eccitazione E_a emette un frammento (n, z) lasciando il nucleo residuo b con una energia di eccitazione E_b , la conservazione dell'energia ci dice che dovrà essere

$$E_a + E_a^{(0)} = E_b + E_b^{(0)} - w + \varepsilon,$$

dove $E_a^{(0)}$ e $E_b^{(0)}$ sono le energie degli stati fondamentali rispettivamente del nucleo a e b ; ε è l'energia cinetica del frammento emesso e w la sua energia di legame (da non confondere con la energia di legame del frammento nel nucleo).

Cioè:

$$E_b = E_a - Q - \varepsilon,$$

avendo posto

$$Q = E_b^{(0)} - E_a^{(0)} - w = \alpha(n + z) - 2(\vartheta - \vartheta_e)(n\beta_n - z\beta_p) - w,$$

Q rappresenta cioè l'energia minima necessaria per l'emissione dal nucleo di un frammento (n, z) con energia cinetica nulla. Perciò la (6) andrà ancora scritta alla stessa maniera solo che al posto di B si dovrà mettere Q che è comprensivo delle differenze delle energie degli stati fondamentali del nucleo di partenza e di arrivo.

3. - Organizzazione del Montecarlo.

Il metodo di Montecarlo è stato applicato nella solita maniera. La condizione

$$(7) \quad A \int_0^{E-Q_i} \sum_i g_i T_i \varepsilon \exp [2\sqrt{a(E - \varepsilon - Q_i)}] d\varepsilon = 1,$$

da le probabilità relative di evaporazione dei neutroni, protoni e particelle α da un dato nucleo. Si è quindi suddiviso l'intervallo energetico $(0, E - Q_i)$ in N parti equiprobabili, tali cioè da aversi

$$\int_{\varepsilon_n}^{\varepsilon_{n+1}} I_i(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{1}{N};$$

questo è stato fatto per vari valori delle energie di eccitazione E del nucleo e per i tre tipi di particelle dette, riportando i punti di divisione in funzione di E ; naturalmente tale preparazione è stata fatta per i diversi nuclei che si sono presentati nell'evaporazione. Infine si è proceduto alle estrazioni: il primo numero estratto, o letto sulle tabelle, dà il tipo di particella che evapora (n, p, α) mentre il secondo dà l'energia cinetica di questa. Non si è tenuto conto dell'evaporazione di altre particelle perchè la probabilità risulta molto piccola. Questo si può vedere considerando il valore di Q .

Avendo preso

$$\beta = 23 \text{ MeV} \quad \alpha = 8,6 \text{ MeV}$$

e

$$\beta_n = 0,8\beta \quad \beta_p = 1,2\beta$$

questi ultimi due d'accordo con il valore di $d\vartheta/dA = 0,0009$ corrispondente a un nucleo con $A=80$, si hanno subito, per il termine $\alpha(n+z)-w$ che compare in Q , i seguenti valori

| (8) | | n | p | α | d |
|-----|-----------------|---------|---------|----------|----------|
| | $\alpha(n+z)-w$ | 8,6 MeV | 8,6 MeV | 6,2 MeV | 15,1 MeV |

Come si vede dalla (8), per i deutoni il termine 15 MeV che compare nello \exp della (7), rende del tutto trascurabile le probabilità relative di evaporazione di tale particella. L'altro termine che compare in Q e cioè $2(\vartheta - \vartheta_e) \cdot (n\beta_n - z\beta_p)$ dà nei vari casi:

$$2(\vartheta - \vartheta_e)(n\beta_n - z\beta_p) = \begin{cases} \text{(per n)} & 2(\vartheta - \vartheta_e)\beta_n = 1,6\beta(\vartheta - \vartheta_e) \\ \text{(per p)} & -2(\vartheta - \vartheta_e) = -2,4\beta(\vartheta - \vartheta_e) \\ \text{(per } \alpha) & 2(\vartheta - \vartheta_e)(2\beta_n - 2\beta_p) = -1,6\beta(\vartheta - \vartheta_e) \\ \text{(per d)} & 2(\vartheta - \vartheta_e)(\beta_n - \beta_p) = -0,8\beta(\vartheta - \vartheta_e). \end{cases}$$

Tale termine, cioè, favorirà l'emissione dei neutroni o dei protoni a seconda che $\beta(\vartheta - \vartheta_e)$ è positivo o negativo. Esso controlla l'emissione in modo che $N - N_e$ non diventi troppo grande.

Esplicitamente nei tre casi considerati, la (4) del paragrafo precedente si scrive:

— per i neutroni

$$I_n(\varepsilon) d\varepsilon \propto T_n \varepsilon \exp [2\sqrt{a(E - 8,6 + 1,6\beta(\vartheta - \vartheta_e) - \varepsilon)}] d\varepsilon ;$$

— per i protoni

$$I_p(\varepsilon) d\varepsilon \propto T_p \varepsilon \exp [2\sqrt{a(E - 8,6 - 2,4\beta(\vartheta - \vartheta_e) - \varepsilon)}] d\varepsilon ;$$

— per le α

$$I_{\alpha}(\varepsilon) d\varepsilon \propto 2T_{\alpha} \varepsilon \exp [2\sqrt{a(E - 6,2 - 1,6\beta(\vartheta - \vartheta_0) - \varepsilon)}] d\varepsilon.$$

Il fattore 2 per le particelle α deriva dal fattore g che è comprensivo degli stati di spin e della massa del frammento evaporato. Per i nuclei intorno all'argento è stato preso, seguendo il WEISSKOPF, $a = 6$ e per quelli attorno al bromo $a = 3$. Questi valori di a sono in accordo anche con i valori teorici dati da FERRARI e VILLI ⁽¹²⁾, i quali considerano a variabile con la temperatura. Se si pensa il nucleo come un gas ideale completamente degenere ($T = 0$), si avrebbe per a un valore troppo elevato (11 MeV^{-1} per $A = 100$ e $Z = 44$). FERRARI e VILLI, tenendo conto del fatto che l'effetto delle interazioni nucleari è quello di diminuire la degenerazione del gas, trovano che a diminuisce al crescere della temperatura. Risultano così giustificati i valori che abbiamo preso per a , trovati empiricamente da WEISSKOPF. Tali valori vanno anche d'accordo con quelli che GUGELOT ⁽¹³⁾ trova sperimentalmente.

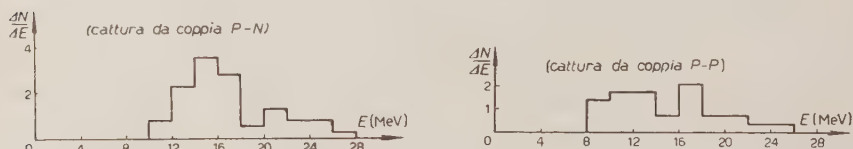


Fig. 7. — Spettro delle α .

Nella fig. 5 a) e 5 b) sono riportati gli spettri di neutroni e protoni per i due tipi di cattura; nella fig. 7 è rappresentato lo spettro per le particelle α .

Conclusioni.

I risultati su cui si deve discutere perchè si prestano ad un confronto sperimentale sono i seguenti:

- 1) Distribuzione delle stelle in funzioni dei rami ionizzanti.
- 2) Spettro dei protoni di alta energia ($E > 30 \text{ MeV}$).
- 3) Rapporto α/p .
- 4) Numero medio dei neutroni per cattura.

⁽¹²⁾ F. FERRARI e C. VILLI: *Nuovo Cimento*, **10**, 94 (1953).

⁽¹³⁾ D. C. GUGELOT: *Phys. Rev.*, **81**, 51 (1951).

Pertanto riassumiamo dapprima i risultati sperimentali esistenti sui punti citati ⁽¹⁴⁾.

1) Nella tabella I sono riportate varie serie di risultati che si riferiscono alla cattura in emulsione fotografica, senza discriminazione fra nuclei leggeri e pesanti.

TABELLA I.

| Numero rami ionizzanti | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|----------------------------------|----------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------|-------------------------|---------------|
| MENON e Coll. (1800 stelle) | $33,9 \pm 1,4$ | $31,3 \pm 1,3$ | $21,8 \pm 1,1$ | $10,9 \pm 0,8$ | $1,9 \pm 0,3$ | $0,1 \pm 0,1$ |
| MENON + ADELMAN (3366 stelle) | $32,4 \pm 1,0$ | $32,7 \pm 1,0$ | $22,3 \pm 0,8$ | $10,5 \pm 0,6$ | $2,0 \pm 0,2$ | $0,1 \pm 0,1$ |
| PERKINS (112 stelle) | 43 | 26,8 | 19,6 | 9,8 | 0,9 | — |
| ENOMOTO e Coll. (200 stelle) | $40,0 \pm 5,8$ | $28,0 \pm_{-5,3}^{+5,8}$ | $21,5 \pm_{-4,5}^{+4,8}$ | $9,5 \pm_{-2,8}^{+4,0}$ | $1,0 \pm_{-0,8}^{+2,1}$ | — |
| Nostri risultati (500 stelle) | $44,2 \pm 3,0$ | $26,3 \pm 2,3$ | $19,5 \pm 2,0$ | $8,4 \pm 1,3$ | $1,6 \pm 0,6$ | — |

È facile vedere che, ove si tenga conto del differente modo con cui viene definito dai vari autori un ramo, vi è un sostanziale accordo. (MENON e coll. e ADELMAN considerano come ramo qualunque gruppo di grani formante una traccia definita, che non sia di elettrone. Noi, insieme a PERKINS, e ENOMOTO e coll. consideriamo come rami solo le tracce $> 5 \mu$).

Più delicato è il problema della separazione tra nuclei leggeri e pesanti, perchè in base ai vari criteri selettivi ⁽¹⁴⁾ è possibile discriminare con relativa sicurezza solo una frazione delle catture. Questa separazione è riportata in tabella II e non verrà discussa in questa sede.

Una parte dei mesoni π^- che terminano in emulsione non dà luogo a stella visibile. Per questa percentuale è stato trovato da PERKINS il valore 29. MENON e coll. 28 ± 2 , ADELMAN 27 ± 2 , noi troviamo 27 ± 3 . MENON e coll. attribuendo questo tipo di cattura esclusivamente a nuclei pesanti o a idro-

⁽¹⁴⁾ D. H. PERKINS: *Phil. Mag.*, **40**, 601 (1949); M. G. K. MENON, H. MUIRHEAD e O. ROCHAT: *Phil. Mag.*, **41**, 583 (1950); F. L. ADELMAN: *Phys. Rev.*, **85**, 249 (1952); S. ENOMOTO, Y. FUJIMOTO, S. HORIE e Y. TSUZUKI: *Progr. Theor. Phys.*, **7**, 353 (1952).

geno, trovano che nelle catture in elementi pesanti, nel 36% dei casi non si ha emissione di particelle ionizzanti. Questo numero può essere considerato in realtà un limite superiore, poichè non si può escludere che gli elementi leggeri non diano luogo a stelle a zero rami, pur ammettendo che questo avverrà molto più frequentemente in elementi pesanti.

TABELLA II.

| Numero rami ionizzanti | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Totale |
|------------------------------|------------------|------|------|------|-----|-----|--------|
| MENON e coll. | leggeri | 11 | 13 | 15 | 6 | 1 | 46 |
| | pesanti | 27 | 18 | 4 | 4 | 1 | 54 |
| Nostri risultati | leggeri | 8,8 | 13,3 | 16,3 | 6,4 | 1,4 | 46,2 |
| | pesanti | 35,4 | 13,0 | 3,2 | 2,0 | 0,2 | 53,8 |
| Percentuale per i pesanti | MENON e coll. | 50,0 | 33,3 | 7,4 | 7,4 | 1,9 | 100 |
| | Nostri risultati | 65,8 | 24,2 | 5,9 | 3,7 | 0,4 | 100 |

2) MENON e coll. hanno trovato che $11,9 \pm 1,4$ per cento delle stelle (escluse le stelle a zero rami) hanno associata una particella di carica e con energia > 30 MeV; ADELMAN trova $9,5 \pm 1,3$. Facendo la separazione tra elementi leggeri e pesanti MENON e coll. trovano che $21,4 \pm 2,5$ per cento delle stelle σ in elementi pesanti hanno associata una particella di carica e con energia > 30 MeV.

3) Il rapporto α/p relativo alle sole stelle in elementi pesanti è stato trovato da PERKINS e da MENON e coll. $0,3 \pm 0,04$.

4) V. T. COCCONI e EDWARDS⁽¹⁵⁾ hanno trovato che il numero medio di neutroni emessi in seguito a cattura di π a riposo varia proporzionalmente al numero atomico dell'elemento assorbente. Dai dati forniti si ricava che per i nuclei pesanti delle emulsioni il numero medio dei neutroni emessi per cattura è $\sim 5,3$.

Si tratta ora di confrontare i risultati del Montecarlo con i dati sperimentali.

La prima colonna della tabella III si è ottenuta considerando che la cattura del mesone avvenga da parte di una coppia N-P che si ripartisce energia ed impulso e considerando che la superficie del nucleo abbia un potere riflettente quale è da attendersi quantisticamente per incidenza normale della particella. Il confronto coi dati sperimentali è molto soddisfacente.

Nella seconda colonna sono riportati i risultati ottenuti considerando la

(15) V. T. COCCONI e D. A. EDWARDS: *Phys. Rev.*, **88**, 145 (1952).

cattura da parte di una coppia P-P, con la stessa ipotesi sul coefficiente di riflessione della superficie. Come si vede la situazione è peggiorata, perchè aumenta fortemente lo spettro dei protoni di alta energia, e pure fortemente diminuisce il numero di cattura senza rami ionizzanti.

TABELLA III.

| | | Cattura da N-P(I) | Cattura da P-P | Cattura da N-P (II) |
|---|------------|----------------------|-------------------|------------------------|
| Distribuzione percentuale in rami, escludendo le stelle a 0 rami | n. rami 1 | 53,9 | 52,6 | 34,1 |
| | » 2 | 35,5 | 37,8 | 31,7 |
| | » 3 | 9,9 | 8,9 | 24,5 |
| | » 4 | — | 0,7 | 9,6 |
| | » 5 | 0,7 | — | — |
| Percentuale di cattura cui non sono associati rami ionizzanti | | 24,0 | 6,25 | 16,5 |
| Particelle di carica $ e $ con energia > 30 MeV. % relativa alle sole stelle con rami ionizzati | | 18,4 | 45,5 | 13,2 |
| Particelle emesse per cattura | N | 4,59 | 4,24 | 4,535 |
| | P | 0,945 | 1,28 | 1,05 |
| | α | 0,255 | 0,194 | 0,70 |
| | α/p | 0,27 | 0,15 | 0,67 |

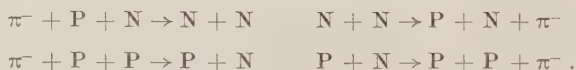
Può, però, sorgere il dubbio che il trattare il potere riflettente della superficie del nucleo come abbiamo fatto noi non sia corretto e che si debba portare alle sue estreme conseguenze il modello ottico, considerando che il coefficiente di riflessione sia funzione dell'angolo di incidenza. (Siamo grati al dott. KRND per molte discussioni sull'argomento). Abbiamo considerato anche questo caso estremo, ottenendo un paesaggio che scarta notevolmente dai dati sperimentali, come si può vedere dalla terza colonna della tabella III. D'altra parte si può ragionevolmente pensare che il modello ottico debba cadere in difetto quando la lunghezza d'onda dei nucleoni diventa confrontabile con le distanze inter-nucleari; e pertanto se si deve tener conto dell'angolo di incidenza sulla superficie nucleare, questo ha senso solo fino che l'energia dei nucleoni non supera i 10 MeV. Ma in tal caso i risultati non si scostano sostanzialmente da quelli del caso semplice trattato all'inizio.

Resta ancora un dubbio importante che potrebbe alterare sensibilmente le conclusioni; si tratta del problema delle densità dei livelli energetici dei nuclei che evaporano, caratterizzati dalla grandezza a . Il valore da noi impiegato

è quello elaborato da WEISSKOPF (¹⁶), però negli ultimi tempi vari autori (¹⁶), hanno cercato di misurare il detto valore con esperienze dirette sullo spettro dei neutroni emessi nelle reazioni nucleari, pervenendo a dei valori notevolmente più elevati di quelli di WEISSKOPF. D'altra parte in questi lavori non viene separato il contributo dei neutroni di knock-on. Sorge allora il dubbio che, se si tenesse conto accuratamente dello svolgimento dei vari processi, il risultato potrebbe essere spiegato con un valore più piccolo di a : inoltre resta da dire che se il valore di a dato da questi autori rende conto dello spettro dei neutroni, questo stesso valore non può render conto dei risultati di analoghe esperienze in cui viene esaminato lo spettro delle particelle cariche anziché quello dei neutroni; infatti l'aumento del valore di a conduce a un impedimento quasi totale dell'emissione di particelle cariche, specialmente alle basse energie ove la teoria evaporativa è soddisfacente.

In conclusione possiamo tentare di affermare che il risultato da noi prospettato per primo è quello che è più coerente col quadro attuale delle reazioni nucleari di moderata energia; pur non potendo escludere l'intervento di modeste frazioni di processi di altro tipo (cattura da P-P, cattura da α). Questo risultato trova riscontro nel fatto già sottolineato da vari autori (¹⁷), che per quanto riguarda la cattura nucleare di mesoni π in volo, l'ipotesi più plausibile è che essa si realizzi per assorbimento da parte di una coppia N-P. Si dovrebbe così concludere che non vi è nessuna ragione contraria alla affermazione che la cattura dei π^- di qualunque energia in seno alla materia nucleare avvenga quasi esclusivamente da parte di una coppia N-P.

Se si accetta questa proposizione bisogna poi chiedersi quali siano i fattori che determinano questa situazione privilegiata per la coppia P-N. Se in realtà il modello a gas di Fermi descrivesse il comportamento dei nucleoni nel nucleo dovremmo concludere che ciò dipende dal fatto che l'elemento di matrice per assorbimento da parte di una coppia P-N è molto maggiore di quello relativo all'assorbimento da parte di una coppia P-P; di questo fatto si potrebbe avere la conferma confrontando, in base al principio dell'equilibrio elementare, questi due processi di assorbimento con i corrispondenti processi a ritroso di produzione e cioè



Comunque, in realtà, nei nuclei le cose sono molto più complicate, poichè non è possibile escludere in essi l'esistenza di ben definite correlazioni tra i vari nucleoni. Se, ad esempio, come è stato suggerito (¹⁷), in seno alla materia

(¹⁶) E. R. GRAVES e L. ROSEN: *Phys. Rev.*, **89**, 343 (1953).

(¹⁷) K. A. BRUECKNER, R. SERBER e K. WATSON: *Phys. Rev.*, **81**, 575 (1951).

nucleare vi fosse una forte tendenza ad associazioni in strutture parziali a deutoni, la ragione della posizione privilegiata della coppia P-N nell'assorbimento diventerebbe banale.

Ma non è facile attribuire una tale situazione privilegiata alla sola coppia P-N e sembra più ragionevole ammettere che esista la tendenza alla formazione di piccoli complessi che vanno dal deutone al raggruppamento α . In ciascuno di questi raggruppamenti, se l'assorbimento avviene sostanzialmente da parte di una coppia di nucleoni, il gruppo P-N è statisticamente privilegiato, a parte la questione, precedentemente discussa, che l'elemento di matrice sia più grande.

L'unica obiezione a questa generalizzazione potrebbe consistere nell'osservare che, se la struttura assorbente è un poco più complessa del deutone, l'energia totale del mesone si può ripartire su più di due nucleoni. Si potrebbe tentare di dare una risposta teorica su questo punto, in base alla importanza relativa delle forze a due corpi rispetto a quelle a più corpi tra nucleoni, ma è forse più immediato segnalare che una esperienza diretta ⁽¹⁸⁾ di cattura di π in He tende a mostrare che il risultato più frequente dell'assorbimento consiste proprio nella distribuzione della energia del mesone sostanzialmente su due neutroni.

Siamo così confidenti che i risultati da noi ottenuti, pur essendo relativi ad un modello nucleare molto schematico, descrivano largamente la generalità dei fatti, perchè comunque si pensi ad una struttura e ad un ordine locale nella materia nucleare, il risultato generale dell'atto di assorbimento è sempre la partenza di due neutroni veloci dal punto di cattura.

È per noi gradito dovere ringraziare il prof. VALLE, direttore dell'Istituto di Fisica di Bologna, per la cordiale ospitalità e per aver in una prima fase, messo a disposizione i mezzi per questo lavoro, poi svolto con il contributo dell'I.N.F.N.

Ringraziamo ancora vivamente tutti coloro che ci hanno aiutato nello svolgimento del lavoro, e in modo particolare il dott. TOMASINI per il prezioso aiuto nella parte relativa alla evaporazione, le dott. FERRETTI e LANZARINI, per l'aiuto prestato nella estrazione degli esemplari, il signor TESTONI per la costruzione del modello meccanico. Ringraziamo ancora infine sentitamente il prof. BERNARDINI e il dott. GOLDBABER per averci dato le lastre nucleari necessarie alla ricerca.

(18) C. P. LEAVETT: *Phys. Rev.*, **86**, 603 (A) (1952) e tesi M.I.T.

S U M M A R Y (*)

This paper closes a work about the absorption of mesons π^- bound on the K -orbit by middle-weight nuclei ($A=100$). The problem is treated by the Montecarlo method and results are compared with experience. The distribution of stars against the number of visible prongs, the percentage of fast protons ($E > 30$ MeV), the emission ratio α -particles/protons, the percentage of captures without visible prongs agree with experimental data if we suppose that the primary act of absorption in matter is performed by a proton-neutron pair. Remembering the results of the capture by nuclei of π -mesons in flight one might conclude that the capture of π -mesons in nuclear matter at all energies (at least up to 100 MeV) is essentially due to a proton-neutron pair.

(*) *Editor's translation.*

Mass Quantization and Isotopic Spin in Non Local-Field Theory.

J. RAYSKI

Nicholas Copernicus University - Toruń, Poland

(ricevuto il 31 Ottobre 1953)

Summary. (*) — Starting from general remarks on the theory of fields, the local formulation of which seems to be insufficient, the author presents a non-local generalization of the Dirac equation that leads, by means of convenient supplementary conditions, to a mass spectrum for the particles of spin $\frac{1}{2}$. The analogies of this mass spectrum with those obtained from the Yukawa and Pais theories are discussed.

(*) *Editor's care.*

1. — A general remark.

Physical quantities may be divided into two classes: universal and specific. Examples of universal quantities are: space-time variables, i.e. operators of position x_μ , displacement operators d_μ , spin variables, and isotopic spin variables. Examples of specific quantities are: wave functions of electrons, (nucleons, etc.), momentum of the electron (nucleon, etc.), field and so on. Universal quantities provide general means for description of physical reality and constitute a geometry in a broad sense. (Owing to the appearance of displacement operators it is a dynamical geometry). The specific quantities are formulated in terms of those geometric, universal quantities.

2. — Defective character of the local field theory.

In the traditional field theory the field quantities ψ are functions of the spin variables α and of the space-time variables x_μ . But x_μ are operators non-commutable with the displacement operators d_μ , and from a broad geometric viewpoint the lack of a dependence of ψ upon d_μ should be regarded

as a defect of the formalism. The displacement operators are involved only in the field equations, e.g. in the Dirac equation

$$(1) \quad \gamma_\mu [\psi(x), d_\mu]_- + \kappa \psi(x) = 0,$$

where $\psi(x) = \psi(x, \alpha) = \psi_\alpha(x)$ is a spinor field quantity. The local fields are only a special case characterized by four supplementary conditions

$$(2) \quad [\psi, x_\mu]_- = 0, \quad \mu = 1, \dots, 4.$$

3. - Non-local fields.

Assuming generally a dependence of field quantities on universal quantities we have

$$(3) \quad \psi = \psi(x, d) \quad \text{where} \quad [x_\mu, i d_\nu]_- = i \delta_{\mu\nu},$$

(moreover ψ is a function of spin variables, isotopic spin variables, and perhaps other yet unknown universal quantities). In consequence of (3) the field quantities are operators in a twofold sense: as functions of the operators x_μ, d_μ and as quantities subjected to field quantization. In the x -representation the geometric operators, x_μ, d_μ as well as the field quantities become matrices

$$(4) \quad \langle x' | x_\mu | x'' \rangle = x'_\mu \delta(x' - x''), \quad \langle x' | d_\mu | x'' \rangle = - \frac{\partial}{\partial x'_\mu} \delta(x' - x''),$$

$$\psi = \langle x' | \psi(x, d) | x'' \rangle$$

satisfying the matrix algebra. Alternatively, the field quantities may be regarded as functions of YUKAWA ⁽¹⁾ variables

$$(6) \quad \psi = \psi(x, r) \quad \text{with} \quad x_\mu = \frac{1}{2}(x'_\mu + x''_\mu), \quad r_\mu = x'_\mu - x''_\mu.$$

There exist two independent linear forms in ψ and d_μ , namely $[\psi, d_\mu]_\mp$. In the x -representation we have

$$(7) \quad \langle x' | [\psi, d]_\mp | x'' \rangle = \left(\frac{\partial}{\partial x'_\mu} \pm \frac{\partial}{\partial x''_\mu} \right) \langle x' | \psi | x'' \rangle = \begin{cases} \frac{\partial \psi(x, r)}{\partial x_\mu} \\ -2 \frac{\partial \psi(x, r)}{\partial r_\mu} \end{cases}.$$

⁽¹⁾ H. YUKAWA: *Phys. Rev.*, **77**, 219 (1950).

There is a striking resemblance between the transition from classical to quantum theory and that from local to non-local theory. In the local limit $\langle x' | \psi | x'' \rangle$ becomes a diagonal matrix

$$(8) \quad \langle x' | \psi | x'' \rangle \rightarrow \psi(x') \delta(x' - x'') \quad \text{or} \quad \psi(x, r) \rightarrow \psi(x)$$

so that (7) tends to

$$(9) \quad \langle x' | [\psi, d_\mu]_{\mp} | x'' \rangle \rightarrow \begin{cases} \partial \psi(x) \\ \partial x_\mu \\ 0 \end{cases}$$

Thus, the anticommutator between ψ and d_μ vanishes in the limit of local fields while in the general (non-local) case it is different from zero.

4. - A generalized Dirac equation.

From a non-local viewpoint the equation (1) is obviously defective since it contains only one of the two independent linear forms in d_μ . A natural generalization of (1) will be

$$(10) \quad \alpha_\mu [\psi, d_\mu]_- + \beta_\mu [\psi, d_\mu]_+ + \kappa \psi = 0.$$

Corresponding to a twofold number of degrees of freedom in the (x, d) -space the number of spin variables and of Dirac matrices is also doubled. We assume

$$(11) \quad [\alpha_\mu, \alpha_\nu]_+ = [\beta_\mu, \beta_\nu]_+ = 2\delta_{\mu\nu}, \quad [\alpha_\mu, \beta_\nu]_+ = 0.$$

Written in the x -representation the equation (10) is

$$(12) \quad \left(\gamma'_\mu \frac{\partial}{\partial x'_\mu} + \gamma''_\mu \frac{\partial}{\partial x''_\mu} + \frac{\kappa}{\sqrt{2}} \right) \langle x' | \psi | x'' \rangle = 0,$$

where $\gamma'_\mu, \gamma''_\mu$ denote another set of Dirac matrices satisfying also the relations (11) and connected with the former by

$$(13) \quad \gamma'_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha_\mu - \beta_\mu), \quad \gamma''_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha_\mu + \beta_\mu).$$

In terms of Yukawa variables the generalized Dirac equation is

$$(14) \quad \left(\alpha_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - 2\beta_\mu \frac{\partial}{\partial r_\mu} + \kappa \right) \psi(x, r) = 0.$$

The operator

$$(15) \quad M = \kappa - 2\beta_\mu \frac{\partial}{\partial r_\mu}$$

obviously plays the role of a mass. Its eigenvalues are supposed to represent the rest masses of spinor particles. In this way the non-local field theory leads in a natural way to mass quantization.

5. — Necessity of supplementary conditions.

Examples of mass operators of a type similar to our (15) have been investigated recently by YUKAWA ⁽²⁾. However, the eigenvalue problem for such four-dimensional operators meets with serious difficulties (connected with the non-definite character of the metric form). Indeed, dealing with the eigenvalue problem in exactly the same way as one used to do in the older quantum mechanics with three-dimensional operators in an euclidean space Yukawa found expressions contradicting the Lorentz invariance ⁽³⁾. The reason of this discrepancy is that eigenvalues and states may be defined only with respect to a space-like surface. Time-like components cannot be used for defining discrete eigenvalues. Thus, we do not believe that for such four-dimensional operators the eigenvalue problem may be formulated at all. The non-local formalism is yet too broad and has to be limited so as to restrict r_μ effectively to a space-like fourvector. Thus, we need some supplementary conditions [being a substitute for (2)].

6. — Reciprocity.

Most probably the character of such supplementary conditions is universal (not specific). In other words: the supplementary conditions should be the same regardless the (spinor or tensor, etc.) character of the field quantities. Thus, Dirac matrices are not expected to be involved into the supplementary conditions. Moreover, universal conditions (restricting the effective range of the variables r_μ) being a matter of geometry are supposed to possess covariance properties characteristic (intrinsic) for the geometry itself. Now, the (x, d) -space

⁽²⁾ H. YUKAWA: *Phys. Rev.*, **91**, 415 (1953).

⁽³⁾ E.g. in the formula (2) of his second Letter to the Editor appears an exponential factor with $\mathbf{r}^2 + r_0^2$ while in a relativistic theory it should be rather $|\mathbf{r}^2 - r_0^2|$.

is invariant against the reciprocal transformation ⁽⁴⁾

$$(16) \quad \lambda^{-1}x_{\mu} \rightarrow i\lambda d_{\mu}, \quad i\lambda d_{\mu} \rightarrow -\lambda^{-1}x_{\mu},$$

where λ is a constant introduced for dimensional reasons (with $c = \hbar = 1$ the constant λ is of dimension of a length). It seems plausible to require the supplementary conditions to be invariant against (16). Such conditions

$$(17') \quad [[\psi, d_{\mu}]_-, x_{\mu}]_- = [[\psi, x_{\mu}]_-, d_{\mu}]_- = 0,$$

$$(17'') \quad \lambda^2 [[\psi, d_{\mu}]_-, d_{\mu}]_- = \lambda^{-2} [[\psi, x_{\mu}]_-, x_{\mu}]_-,$$

have been introduced earlier by the author ^(5,6). With (17'') a universal length λ is introduced into the formalism. With

$$(18) \quad \alpha_{\mu}^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\lambda^{-1}x_{\mu} \mp i\lambda d_{\mu}),$$

the supplementary conditions may be written also in an equivalent but more elegant form

$$(19) \quad [[\psi, \alpha_{\mu}^+]_-, \alpha_{\mu}^+]_- = [[\psi, \alpha_{\mu}^-]_-, \alpha_{\mu}^-]_- = 0.$$

in terms of Yukawa variables the supplementary conditions are

$$(20) \quad r_{\mu} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \psi(x, r) = 0, \quad \left(\lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial x_{\mu}^2} - \lambda^{-2} r_{\mu}^2 \right) \psi(x, r) = 0.$$

Introducing Fourier transforms $\psi(p, r)$ the Dirac equation (14) and the conditions (20) become

$$(21) \quad \left(i\alpha_{\mu} p_{\mu} - 2\beta_{\mu} \frac{\partial}{\partial r_{\mu}} + \kappa \right) \psi(p, r) = 0,$$

$$(22) \quad p_{\mu} r_{\mu} \psi(p, r) = 0, \quad (\lambda^2 p_{\mu}^2 + \lambda^{-2} r_{\mu}^2) \psi(p, r) = 0.$$

⁽⁴⁾ M. BORN: *Rev. Mod. Phys.*, **21**, 463 (1949).

⁽⁵⁾ J. RAYSKI: *Proc. Phys. Soc.*, **64**, 957 (1951); *Acta Phys. Pol.*, **11**, 109 (1951).

⁽⁶⁾ Instead of (17'') YUKAWA assumed a little different second condition which is not self-reciprocal:

$$(17Y) \quad [[\psi, x_{\mu}]_-, x_{\mu}]_- = \lambda^2 \psi.$$

For a particle at rest $\mathbf{p}=0$, $p_0=M$ we get

$$(22') \quad \left(-\alpha_4 M - 2\beta_v \frac{\partial}{\partial r_v} + \kappa \right) \psi = 0,$$

$$(22'') \quad r_4 M \psi = 0, \quad (-\lambda^2 M^2 + \lambda^{-2} r_v^2) \psi = 0.$$

From (22') it is seen that (with $\mathbf{p}=0$) $\psi(p, r)$ must vanish unless $r_4=0$, $r=\lambda^2 M$ so that the range of variables of r_μ is effectively restricted to polar angles ϑ, φ on a sphere with radius $r=\lambda^2 M$. With the alternative auxiliary condition (17Y) the radius is simply λ .

7. - Mass spectrum.

To determine the eigenvalues of M we have to solve the equation (21') with the constraints $r_0=0$, $r=\lambda^2|M|$. To this end we go over to polar variables (7)

$$(23) \quad \beta_i \frac{\partial}{\partial r_i} = i\varepsilon\beta_4 \frac{\partial}{\partial r} - i\varepsilon j r^{-1}, \quad i=1, \dots, 3, \quad \text{with} \quad j = \beta_4(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{l} + 1),$$

where $\boldsymbol{\tau}$ denotes Pauli matrices in the space of the β indices, \mathbf{l} is the orbital angular momentum in the space of \mathbf{r} , ε is a matrix commuting with $\boldsymbol{\tau}$ and anticommuting with β_4 with the property $\varepsilon^2=1$. ε together with β_4 , and $\boldsymbol{\tau}$ may be represented as sets of independent matrices with two rows and columns whose eigenvalues are $\pm i$ for $\beta_4\varepsilon$ and $\pm(j+\frac{1}{2})$ for $\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{l} + 1$. The terms with $\partial/\partial r_0$ and $\partial/\partial r$ disappear in consequence of the constraints and we are left with

$$(24) \quad \left(\pm M \pm 2 \left(j + \frac{1}{2} \right) r^{-1} + \kappa \right) \psi_{(r=\lambda^2|M|)} = 0 \quad \text{with} \quad j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$$

This yields two families of particles (and antiparticles) with masses $M_1^{(j)}$ and $M_2^{(j)}$ satisfying the equations

$$(25) \quad M_1^{(j)} = \kappa + \frac{2(j+\frac{1}{2})}{\lambda^2 M_1}, \quad M_2^{(j)} = \kappa - \frac{2(j+\frac{1}{2})}{\lambda^2 M_2}.$$

Each family splits into two subfamilies with absolute values of masses

$$(26) \quad \begin{cases} \lambda M_{1,i}^{(j)} = \left| \frac{\lambda\kappa}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\lambda\kappa}{2}\right)^2 + 2\left(j+\frac{1}{2}\right)} \right|, \\ \lambda M_{2,i}^{(j)} = \left| \frac{\lambda\kappa}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\lambda\kappa}{2}\right)^2 - 2\left(j+\frac{1}{2}\right)} \right|, \end{cases}$$

(7) P. A. M. DIRAC: *Quantum Mechanics* (Oxford, 1947), third ed., p. 266.

where i refers to $i = 1, 2$. The number of masses of the first family is infinite, while that of the second family is finite and restricted by the conditions $2j \leq (\lambda\kappa/2)^2 - 1$.

8. — The formalism of Pais ⁽⁸⁾.

By using the auxiliary condition (17Y) instead of (17'') we have to replace $\lambda^2 M^i$ by A in (25) which yields a simpler, linear mass spectrum

$$(26') \quad AM_i^{(j)} = |A\kappa \pm 2(j + \frac{1}{2})|, \quad i = 1, 2,$$

which is identical with the mass spectrum in the formalism of Pais if our $\kappa = 2/A$ is identified with the mass of the nucleons. (Pais's A is smaller from Yukawa's by a factor $1/2$). Indeed, by interpreting the matrices τ appearing in (23) as isotopic spin matrices, the non-local formalism with the auxiliary condition (17Y) is completely equivalent with Pais' formalism. It seems to us, however, that the condition (17'') leading to the more elaborate mass spectrum (27) is preferable.

Acknowledgements.

I am indebted to Professors A. PAIS and H. YUKAWA for making their publications accessible to me prior to publication.

⁽⁸⁾ A. PAIS: *Proc. Lorentz and Kamerlingh Onnes Conf. Leiden* (1953), June 22.

RIASSUNTO (*)

Partendo da osservazioni generali sulla teoria dei campi, la cui formulazione locale appare insufficiente, viene proposta una generalizzazione di tipo non locale dell'equazione di Dirac, la quale conduce, con l'uso di opportune condizioni supplementari, a uno spettro di masse per le particelle a spin $1/2$. Sono discusse le analogie di tale spettro di masse con quelli che si ottengono nelle teorie di Yukawa e di Pais.

(*) A cura della Redazione.

On the Existence of Unstable Charged Particles of Hyperprotonic Mass (*).

A. BONETTI, R. LEVI SETTI and M. PANETTI

Istituto di Scienze Fisiche dell'Università - Milano
Istituto Nazionale di Fisica Nucleare - Sezione di Milano

G. TOMASINI

Istituto di Fisica dell'Università - Genova

(ricevuto il 3 Novembre 1953)

Summary. — Further evidence is presented in favour of the existence of charged unstable particles of hyperprotonic mass. In two cases the decay product is a fast light particle, in one case it is a slow proton. The decay schemes: $\Omega_{\pi}^{\pm} \rightarrow n + \pi^{\pm} + Q$; $\Omega_p^+ \rightarrow p + \pi^0 + Q$ are proposed for the two types of events respectively. They are possibly alternative modes of decay of the same type of H-particle. The evidence available from photographic emulsion and cloud chamber experiments is discussed.

The observation of the decay at rest of a particle (J_{l_1}) heavier than the proton has been reported in a preceding letter ⁽¹⁾. Two other events which can be also interpreted as the decay of H-particles ^(**) are described here: of these, the first (J_{l_1}) is similar to J_{l_1} , since the secondary is a fast charged particle certainly lighter than a proton: the second (J_{n_1}) on the other hand shows a slow proton arising from the end of the primary track.

(*) Communicated at the Cosmic Ray Conference of Bagnères de Bigorre, July 1953.

(**) Nomenclature proposed at the Cosmic Ray Conference, Bagnères de Bigorre, July 1953.

⁽¹⁾ A. BONETTI, R. LEVI SETTI, M. PANETTI and G. TOMASINI: *Nuovo Cimento*, **10**, 345 (1953).

Since these examples of H-particles have already been indicated with the symbol J in preceding communications, we find it convenient, to avoid confusion, to retain in this paper the old denomination. The subfixes l and p indicate that the charged secondary is a light meson or a proton.

1. - Mass measurements on J-particles.

The mass of J-particles has been determined from the conventional α -R and G-R measurements. The proton tracks employed as standard for relative mass measurements by gap-counting were taken from the vicinity of the J-tracks, at the same depth and with the same dip.

The mass of our K-mesons and heavier particles has been also determined by C. DILWORTH, making use of the « constant sagitta method » ⁽²⁻⁴⁾ (*). A very good agreement has been found between the new results and those previously obtained. In this paper, when a mean value is taken of scattering and gap determinations, the α -R mass value employed is that given by the constant sagitta method: this choice has been recommended in the standardisation meeting at the Varenna Summer School (Summer 1953).

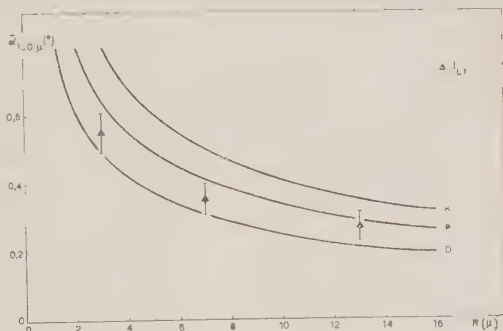


Fig. 1. Mean angle of scattering v. range for particle J_{l1} . The first two points refer to independent sections of the track of about 4 mm in the first plate; the third one corresponds to a section of the same length in the second plate.

See (1).

a) Events J_{l1} and J_{l2} . - Event J_{l1} has been already described in a preliminary note ⁽¹⁾, where the results of the mass determination by α -R (angular) method was given. A test of the inner consistency of these measurements is shown in Fig. 1: the three points correspond to $\bar{\alpha}_{100\mu}$ determined on inde-

(2) C. DILWORTH, S. GOLDSACK and L. HIRSCHBERG: *Cosmic Ray Conference*, Bagnères de Bigorre, July 1953, and *Nuovo Cimento*, in press.

(3) S. BISWAS, E. C. GEORGE and B. PETERS: *Cosmic Ray Congress*, Bagnères de Bigorre, July 1953.

(4) T. HOLTEBEEK, N. ISACHSEN and S. O. SØRENSEN: *Phil. Mag.*, **44**, 1037 (1953).

(*) This method gives a better precision than the usual ones, particularly on short tracks: a calibration on proton and meson tracks gives a mean value of the proton mass of $1790 \pm 40 m_e$ ⁽²⁾.

pendent sections of the track of about 4 mm. The plot strongly suggests that the direction of motion of the particle is towards the decay point at $R = 0$.

Measurements by the G-R method consistently indicate a mass higher than that of the proton; however irregularities in the plot of the gap v . range, probably due to uneven development, made uncertain the attribution of a definite value of the mass.

Due to shortness of the primary of event J_{l_2} the indications on its mass are less accurate; the direction of motion however was well established, showing that also this event represents a decay process.

TABLE I.

| Primary Particles. | | | | |
|--------------------|--------------------------|---------------------------------|-------------------------|----------------------------|
| | Residual Range, μ | Mass, m_e Constant Sagitta | Mass, m_e G-R | Mass, m_e α -R |
| J_{l_1} | 15 760 | 2210^{+260}_{-240} | $> p$ | $2\ 500^{+570}_{-515}$ |
| J_{l_2} | 1 250 | $2\ 340^{+750}_{-620}$ | $2\ 550^{+1450}_{-850}$ | $2\ 250^{+1190}_{-890}$ |

The information on both secondaries is meagre. They are too short (120 μ and 245 μ respectively) for scattering measurements to be made; however no measurable deviation is observed along their path. Their grain density is near the minimum. It can be excluded that they are slow electrons arising from the radioactive decay of known particles, and may be either fast electrons or fast mesons, obviously not protons, since the energy available is insufficient. The data concerning the primaries of the two events are collected in Table I.

b) *Event J_{p_1} .*—Event J_{p_1} is shown in the photomicrograph of Fig. 2. The particle J_{p_1} comes to the end of its range at point 0 and there gives rise to a highly ionizing secondary which stops in the emulsion (p). The primary, travelling at an average angle of dip of 25° to the plane of the unprocessed plate, has a residual range of 900 μ , the secondary, travelling horizontally, has a range of $1\ 670 \pm 18 \mu$. The results of mass measurements on both primary and secondary are contained in Table II. The absence of a visible decay product at the end of the secondary particle, together with the results on mass determination (see Table II), strongly suggest that this particle is a proton. Under this assumption, we deduce from the range an energy of 18.7 ± 0.18 MeV at the point of ejection 0.

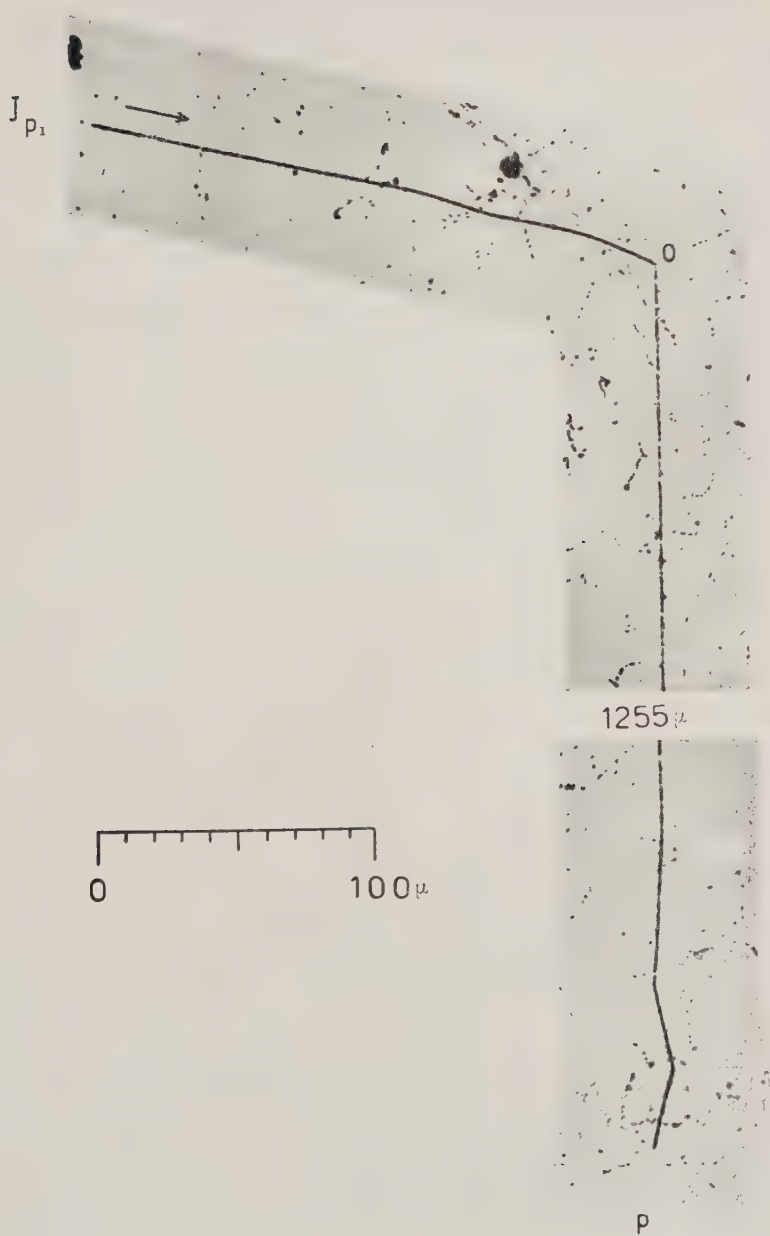


Fig. 2. — Partial photomicrograph of event J_{p_1}

Observed by R. LEVI SETTI

TABLE II.

| Primary Particle. | | | | |
|-------------------|--------------------------|---------------------------------|-------------------------|----------------------------|
| | Residual Range, μ | Mass, m_e Constant Sagitta | Mass, m_e G-R | Mass, m_e α -R |
| J_{p_1} | 900 | $2\,330^{+830}_{-710}$ | $2\,700^{+1150}_{-900}$ | $1\,840^{+840}_{-590}$ |

| Secondary Particle | | | | |
|--------------------|-----------------|---------------------------------|--------------------|--|
| | Range, μ | Mass, m_e Constant Sagitta | Mass, m_e G-R | Eney, MeV |
| J_{p_1} | $1\,670 \pm 18$ | $2\,030^{+530}_{-480}$ | $1\,840 \pm 670$ | 18.7 ± 0.18 (Identified proton) |

The assumption that event J_{p_1} involves two distinct particles, one of which is considered to be the primary, the other the secondary, is supported by the results of the measurements which show that the event can hardly be interpreted as a scatter-
ing or two pronged star.

The graph of Fig. 3 shows the variation of scattering and of gap-density along the two tracks. The sense of variation of both measured quantities, before and after the well marked discontinuity observed at point 0, indicates that the two tracks are due to distinct particles: one of them, the primary, moves, slowing down, towards the point 0;

the other one, the secondary, is ejected from the same point and then is stopped. The ionization of the primary near point 0 suggests also that the particle is either at the end of its range or very near to it.

The possibility of the event being due to a chance juxtaposition of the end of a stopped particle with the origin of a knock-on proton has been considered. Actually, from the density of these two types of events in our plates, one would expect one chance juxtaposition in about 10^7 cm³ of emulsion. The probability of observing such a coincidence is therefore very small.

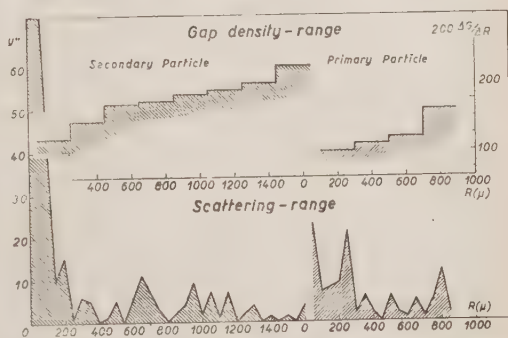


Fig. 3. Gap and scattering measurements on the primary and secondary particles of event J_{p_1} .

2. - Interpretation of the results.

The two events J_{I_1} and J_{I_2} belong to a group of particles heavier than the K-mesons, which decay into a single charged secondary. They are distinguished from K-mesons on the basis of mass measurements on the primaries.

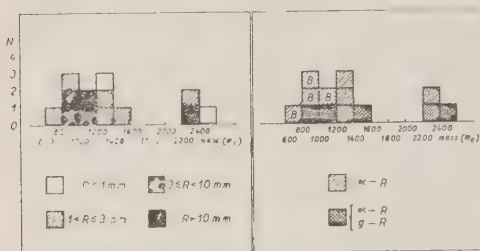


Fig. 4. - Mass distribution of K- and J-particles.

particle and the type of measurements performed on it are indicated.

The question arises whether or not the points corresponding to J-particles can be regarded as representing the tail of the distribution of the K-mesons. Let us assume that J_{I_1} and J_{I_2} belong to populations of particles of mass about $1000 m_e$, with dispersions equal to those of the two tracks respectively: one finds that the probability of getting the constant sagitta corresponding to the observed mass of J_{I_1} is about 10^{-8} ; similarly the compound probability of getting the observed values of constant sagitta and gap-density for J_{I_2} is about 10^{-4} .

Thus J_{I_1} and J_{I_2} should represent the decay of particles with a mass significantly different from that of K-mesons; we suggest that the two events are really due to hyperprotons of mass around $2300 m_e$.

J_n requires a more complex analysis. We will discuss three possible interpretations of this event:

- 1) nuclear capture of a negative K-meson at rest or in flight;
- 2) nuclear interaction of a deuteron, giving rise to the evaporation of a proton from the target nucleus;
- 3) spontaneous disintegration of an unstable particle.

If one considers the primary particle as a K-meson not at the end of its

(5) C. DILWORTH, S. GOLDSACK and L. HIRSCHBERG: *Cosmic Ray Conference*, Bagnères de Bigorre, July 1953 and *Nuovo Cimento*, in press.

range, one should expect: *a*) a mass determined from gap measurements lighter than that corresponding to a K; *b*) a non constant sagitta, the set of variable cells being that corresponding to a particle at the end of its range. A check has been made of the variation of the sagitta with residual range and, in the limits of the accuracy allowed by the short track, no significant departure from a constant level has been observed. On the other hand, the higher mass value determined by gap, already inconsistent with the mass of a K-meson at rest is still less compatible with a K-meson in flight. Let us then assume that the particle is a K-meson at rest: the probability of observing the high mass value obtained from both scattering and gap measurements is of the order of 10^{-6} .

The second interpretation requires that the «primary» deuteron should arrive at the point 0 with a certain residual energy (*). Since the mass to be supposed in this case is higher than that measured, we find that the gap-density could be made to fit quite well that of a deuteron in flight. Let us assume a residual energy of about 10 MeV (energy comparable with the height of the Coulomb barrier for the heaviest nuclei of the emulsion): from scattering one should have found a non constant sagitta with an average value corresponding to the sagitta of a particle of mass around $10\,000\,m_e$. The probability that the observed value of sagitta is a fluctuation from the expected one is about 10^{-4} .

It seems therefore highly probable that this event represents a decay process; the parent particle must then be more massive than the proton.

Other examples of hyperprotons have been found both in photographic emulsion (6,7) and in Wilson chamber experiments (8-11). Among the events observed by these authors there appear two types of decay. In some cases the light secondary was identified as a π -meson (6-9). Two decay schemes have been proposed by analogy with the decay of V_1^0 -particles. Adopting the nomenclature proposed at the Bagnères Conference these are:

$$(a) \quad \Omega_{\pi}^{\pm} \rightarrow n + \pi^{\pm} + Q,$$

$$(b) \quad \Omega_p^{+} \rightarrow p + \pi^0 + Q.$$

(*) See P. FOWLER's intervention: *Proceedings of the Cosmic Ray Conference*, Bagnères de Bigorre, page 183, July 1953.

(6) M. CECCARELLI and M. MERLIN: *Cosmic Ray Conference*, Bagnères de Bigorre, July 1953; *Nuovo Cimento*, **10**, 1207 (1953).

(7) D. LAL, YASH PAL and B. PETERS: *Cosmic Ray Conference*, Bagnères de Bigorre, July 1953.

(8) H. S. BRIDGE and M. ANNIS: *Phys. Rev.*, **82**, 445 (1951).

(9) B. ROSSI and H. BRIDGE: *Cosmic Ray Conference*, Bagnères de Bigorre, July 1953.

(10) A. M. YORK, R. B. LEIGHTON and E. K. BJORNERUD: *Phys. Rev.*, **90**, 167 (1953) and *Cosmic Ray Conference*, Bagnères de Bigorre, July 1953.

(11) W. B. FRETTER, B. G. GREGORY, R. JOHNSTON, A. LAGARRIGUE, H. MEYER, F. MÜLLER and C. PEYROU: *Cosmic Ray Conference*, Bagnères de Bigorre, July 1953.

The events of CECCARELLI and MERLIN ⁽⁶⁾ and of LAL *et al.* ⁽⁷⁾ are compatible with the first decay scheme and give Q -values of 131 and 135 MeV respectively. BRIDGE and ANNIS ^(8,9) found an event which could be interpreted as an Ω_{π}^{\pm} with Q of 120 MeV.

Our events J_{l_1} and J_{l_2} can be attributed to the class of Ω_{π}^{\pm} -particles. Their measured mass is in agreement with that calculated from the decay scheme (a), assuming a Q -value of the order of that given by CECCARELLI and MERLIN and by LAL *et al.* The ionization of the secondary particles is consistent with that of a π -meson of about 100 MeV energy.

The observed coincidence between the energies of the π -mesons ejected both in the disintegration of the Ω_{π}^{\pm} -particles and that of χ -mesons ⁽¹²⁾ makes it possible the separation between individual examples of Ω_{π}^{\pm} 's and K-mesons only on the basis of accurate mass measurements on the primaries.

The fact that no example of slow K-particles decaying in flight in the emulsion has been reported, whereas among slow Ω_{π}^{\pm} 's there are two cases ^(6,7) of decay in flight, could be interpreted as an indication of a shorter mean life for these particles than for K-mesons.

TABLE III. — *Charged Hyperons.*

| | Type of detector | Mass, m_e direct measur. | Q , MeV | Mass from assumed decay scheme |
|---|---------------------|-------------------------------|--|--------------------------------------|
| a) $\Omega_{\pi}^{\pm} \rightarrow n + \pi^{\pm} + Q$ | | | | |
| J_{l_1} ⁽¹⁾ | Nuclear plate | 2210 ± 250 | ? | ? |
| J_{l_2} | » | 2400 ± 580 | ? | ? |
| Padua event ⁽⁶⁾ | » | 2100 ± 400 | 131 ± 24 | ~ 2370 |
| Bombay event ⁽⁷⁾ | » | 2420 ± 330 | 135 ± 35 | 2380 ± 30 |
| M.I.T. event ^(8,9) | Cloud chamber | — | ~ 120 | ~ 2350 |
| b) $\Omega_p^+ \rightarrow p + \pi^0 + Q$ | | | | |
| J_{2_1} | Nuclear plate | 2500 ± 620 | 115 ± 3 | 2320 ± 3 |
| Cal. Tech. events ⁽¹⁰⁾ | Cloud chamber | — | $\begin{cases} \sim 40 \\ \sim 40 \end{cases}$ | ~ 2180 |
| Paris event ⁽¹¹⁾ | » | — | 26.38 | ~ 2170 |

Among the events which can be interpreted as corresponding to the second decay scheme, two described by YORK *et al.* ⁽¹⁰⁾ give a Q of about 40 MeV

⁽¹²⁾ M. G. K. MENON and C. O'CEALLAIGH: *London Discussion on Heavy Mesons*, January 1953.

A value of this order is reported by FRETTER *et al.* ⁽¹¹⁾. If we attribute to event J_{ν_1} the decay scheme (b), we find a Q -value of 115 ± 3 MeV and a mass for the Ω_p^+ of $2320 \pm 3 m_e$.

The data available on charged hyperons are collected in Table III.

The Q -values obtained on the cloud chamber events of type Ω_p^+ seem to be very close to that of the V_1^0 -particles, i.e. 37 MeV. On the contrary, the Q of J_{ν_1} is significantly higher and in agreement with that observed for events following decay a). Thus while the Cal. Tech. and Paris Group events could be regarded as the charged counterpart of V_1^0 -particles, J_{ν_1} as well as the Ω_{π}^{\pm} examples cannot be interpreted in this way. The agreement of the Q -values between J_{ν_1} and Ω_{π}^{\pm} suggests that the two types of events represent alternative modes of decay of the same particle.

Acknowledgements.

We wish to express our deepest gratitude to C. DILWORTH for the measurements performed on our events and for invaluable assistance. Our thanks are due to the Brussels Group for having communicated to us their data on K-particles.

We are grateful to proff. CALDIROLA and OCCHIALINI for stimulating discussions and suggestions, and to proff. PANCINI and POLVANI for their interest in our work and for having made possible the collaboration between our laboratories.

RIASSUNTO

Si presentano nuovi risultati in favore dell'esistenza di particelle cariche instabili di massa iperprotonica. In due casi il prodotto di disintegrazione è una particella leggera veloce, in un altro caso è un protone lento. Si propongono gli schemi

$$\Omega_{\pi}^{\pm} \rightarrow n + \pi^{\pm} + Q ; \quad \Omega_p^+ \rightarrow p + \pi^0 + Q$$

per interpretare i due tipi di eventi rispettivamente. Essi rappresentano probabilmente processi di disintegrazione alternativi dello stesso tipo di particella H. Si discutono i risultati fino ad oggi disponibili riguardanti esperienze in camera di Wilson e in lastre nucleari.

LETTERE ALLA REDAZIONE

(La responsabilità scientifica degli scritti inseriti in questa rubrica è completamente lasciata dalla Direzione del periodico ai singoli autori)

Sciami di almeno due elettroni prodotti in piombo da raggi cosmici.

C. MILONE

Istituto di Fisica dell'Università - Catania

(ricevuto il 31 Ottobre 1953)

Durante una ricerca sugli elettroni e fotoni negli sciami estesi sono state eseguite delle misure preliminari sugli sciami di almeno due elettroni emergenti da uno strato di piombo quando su questo giunge un elettrone od un fotone di origine co-

Il dispositivo sperimentale adoperato è rappresentato nella fig. 1a; sono stati registrati contemporaneamente gli eventi $A+B+C$ e $B+C$ al variare dello spessore s dello strato di piombo interposto fra A e B . I tre contatori del gruppo A erano riuniti in parallelo; un evento C invece era costituito da una qualsiasi coincidenza del tipo $1+2$ ovvero $2+3$ ovvero $1+3$. Tutti i contatori avevano superficie utile di 20×20 cm². I risultati ottenuti sono riassunti nella tabella I.

Coi valori dei rapporti

$$\frac{A+B+C}{\min} = E(s),$$

e

$$\frac{(B+C) - (A+B+C)}{\min} = F(s),$$

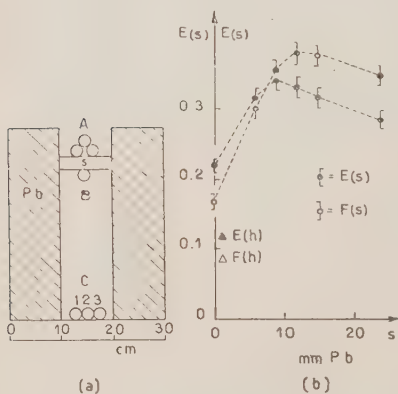


Fig. 1.

smica (associato o no a sciami estesi). I risultati ottenuti possono essere confrontati con i risultati di misure di altri Autori (1-4).

(1) V. H. REGENER: *Ric. Scient.*, **11**, 66 (1940).

(2) N. NERESON: *Phys. Rev.*, **61**, 111 (1942).

(3) J. CLAY e C. LEVERT: *Physica*, **12**, 321 (1946).

(4) S. FRANCHETTI: *Nuovo Cimento*, **10**, 551 (1953).

sono stati costruiti i grafici riportati nella fig. 1b. I valori indicati con $E(h)$ ed $F(h)$ sono relativi alle frequenze degli eventi registrati allorchè sopra il gruppo A veniva posto uno strato di piombo di spessore $h=150$ mm. Questi eventi, attribuibili a particelle penetranti, costituiscono una parte del fondo. Sottratto il fondo, le anticoincidenze $F(s)$ possono essere attribuite per la maggior parte a fotoni producenti in s almeno due elettroni; indichiamo tali eventi con f ($n \geq 2$). Se le coincidenze $E(s)$, sottratto il fondo,

TABELLA I.

| s mm Pb | min | $A+B+C$ | $B+C$ | $\frac{A+B+C}{\text{min}} = E(s)$ | $\frac{(B+C)-(A+B+C)}{\text{min}} = F(s)$ |
|--------------|-------|---------|-------|-----------------------------------|---|
| 0 | 2 820 | 615 | 1 089 | $0,218 \pm 0,009$ | $0,618 \pm 0,008$ |
| 6 | 1 360 | 426 | 834 | $0,314 \pm 0,015$ | $0,300 \pm 0,015$ |
| 9 | 1 370 | 466 | 951 | $0,341 \pm 0,016$ | $0,354 \pm 0,015$ |
| 12 | 1 345 | 445 | 957 | $0,332 \pm 0,016$ | $0,380 \pm 0,017$ |
| 15 | 1 405 | 430 | 958 | $0,314 \pm 0,015$ | $0,376 \pm 0,016$ |
| 24 | 1 500 | 424 | 948 | $0,283 \pm 0,014$ | $0,348 \pm 0,015$ |

| h mm Pb sopra A | min | $A+B+C$ | $B+C$ | $E(h)$ | $F(h)$ |
|----------------------|-------|---------|-------|------------------|-------------------|
| 150 | 4 065 | 845 | 824 | $0,12 \pm 0,005$ | $0,083 \pm 0,004$ |

possono essere attribuite per la maggior parte a produzione di elettroni in s da parte di un elettrone, e indichiamo questi eventi con e ($n \geq 2$), riferendoci ai valori corrispondenti ai massimi delle due curve

di transizione si ricava

$$\frac{f(n \geq 2)}{e(n \geq 2)} = 1,84 + 0,4.$$

Questo valore non differisce eccessiva-

TABELLA II.

| $f(n \geq 2)$ $e(n \geq 2)$ | Autori | Metodo di misura | Note |
|--------------------------------|------------------------|---------------------|---|
| $\cong 1$ | REGENER, 1940 | Contatori | In corrispondenza del massimo delle curve di transizione. |
| $\cong 3$ | NERESON, 1942 | Contatori | In corrispondenza del massimo delle curve di transizione |
| $\frac{70 + 10\%}{30 + 20\%}$ | CLAY e LEVERT, 1946 | Contatori | Per $s = 8$ mm Pb |
| $2 \pm 0,4$ | FRANCHETTI, 1953 | C.W. | Per $s = 20$ mm Pb |
| $1,8 \pm 0,4$ | Presente lavoro | Contatori | In corrispondenza del massimo delle curve di transizione. |

mente da quelli ottenuti da altri Autori (tabella II) quando si tenga conto che, come hanno fatto notare DAUDIN e TSAI CHU ⁽⁵⁾, le misure eseguite con soli contatori non possono fornire su questo argomento indicazioni esatte. Lo scarto $\pm 0,4$ aggiunto al valore 1,8 si riferisce quindi solo alle oscillazioni statistiche: eventi $A + (B + C)$ dovuti a sciami prodotti da un fotone associati con una particella ionizzante che colpisce A , od eventi dovuti a più particelle indipendenti possono avere influito sensibilmente sui risultati. Si nota però (tabella II) che le diverse misure eseguite con con-

tatori forniscono in generale

$$\frac{f(n \geq 2)}{e(n \geq 2)} > 1,$$

in accordo coi risultati ottenuti in c.W. da FRANCHETTI ⁽⁴⁾; ciò mostrerebbe, in accordo con le conclusioni del predetto autore ⁽⁴⁾ l'esistenza di un eccesso di fotoni rispetto agli elettroni per energie relativamente basse.

⁽⁵⁾ J. DAUDIN e TSAI-CHU: *Compt. Rend.*, **234**, 1277 (1952).

Sull'equazione del moto dell'elettrone nell'elettrodinamica classica.

P. CALDIROLA

Istituto di Scienze Fisiche dell'Università - Milano
Istituto Nazionale di Fisica Nucleare - Sezione di Milano

(ricevuto il 9 Novembre 1953)

Sono note le difficoltà che si incontrano, già nell'elettrodinamica classica (cioè non quantistica), quando si voglia determinare il moto di un elettrone sotto l'azione di forze esterne e di quelle derivanti dalla reazione dovuta alla radiazione emessa dall'elettrone stesso.

Nella approssimazione non relativistica una equazione per tale moto è stata ricavata a suo tempo da LORENTZ ⁽¹⁾ nell'ipotesi che l'elettrone sia schematizzabile come una piccola sfera carica indeformabile. Tale equazione è la seguente:

$$(1) \quad m_0 \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} + \mathbf{R},$$

essendo la reazione \mathbf{R} espressa da una serie di potenze crescenti del raggio R dell'elettrone:

$$\mathbf{R} = \frac{2e^2}{3c^3} \frac{d^2\mathbf{v}}{dt^2} + (\dots)R + (\dots)R^2 + \dots.$$

Si osservi esplicitamente che i coefficienti delle varie potenze di R contengono le derivate successive della velocità \mathbf{v} e che inoltre la loro effettiva espressione cambia se si assumono modelli d'elettrone diversi da quello adottato da LORENTZ di sfera rigida; in ogni caso però i termini di \mathbf{R} successivi al primo si annullano tutti quando si supponga, con un passaggio al limite, l'elettrone puntiforme ($R \rightarrow 0$).

Successivamente DIRAC ⁽²⁾ ha sviluppato una teoria relativistica per l'elettrone puntiforme arrivando all'equazione:

$$(2) \quad m_0 c \frac{du_\alpha}{ds} = F_\alpha - R_\alpha.$$

⁽¹⁾ H. A. LORENTZ: *The theory of Electrons* (Leipzig, 1916), 2ª ediz.

⁽²⁾ P. A. M. DIRAC: *Proc. Roy. Soc.*, A **167**, 148 (1938); *Ann. Inst. Poincaré*, **9**, 13 (1938).

dove:

$$F_x = \frac{e}{c} F_{\alpha\beta} u_\beta, \quad R_x = \frac{2e^2}{3c} \left(\frac{d^2 u_\alpha}{ds^2} + u_\alpha u_\beta \frac{d^2 u_\beta}{ds^2} \right) \quad (u_\alpha u_\alpha = -1)$$

sono rispettivamente i quadrivettori della forza esterna e della reazione. La (2), nell'approssimazione non relativistica, coincide con l'equazione di Lorentz per il caso limite di un elettrone puntiforme, cioè alla:

$$(3) \quad m_0 \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \frac{d^2 \mathbf{v}}{dt^2} + \mathbf{F}.$$

La difficoltà maggiore che si incontra nell'adozione di equazioni del tipo della (1) o della (2) è legata al fatto che, comparando in esse derivate temporali della velocità di ordine superiore al primo, i loro integrali generali contengono un numero di costanti arbitrarie superiore a due e, attribuendo a queste costanti valori generici, si hanno soluzioni descriventi moti in netto contrasto con le previsioni dell'ordinaria intuizione fisica. Per ovviare a questo inconveniente, diversi autori ⁽³⁾ hanno suggerito opportuni criteri tendenti a discriminare, tra le soluzioni analitiche delle equazioni, le soluzioni « fisiche » da quelle « non fisiche ». Tali criteri non hanno però un carattere completamente generale. Per di più in alcuni problemi particolari, come quello, sia pure un po' patologico, di un elettrone lanciato lungo una retta contro un protone « fisso », si hanno ⁽⁴⁾ come soluzioni delle (2) risultati che, indipendentemente dai valori assunti dalle costanti arbitrarie, non sembrano in alcun modo fisicamente accettabili.

Le considerazioni precedenti ci hanno fatto ritenere che, se si vuole arrivare ad un'equazione soddisfacente per il moto dell'elettrone, è necessario riesaminare le ipotesi essenziali stesse su cui si fondano le equazioni (1), (2) e (3).

Recentemente in diversi campi della fisica teorica ⁽⁵⁾ si è riscontrata la necessità di introdurre una lunghezza minima fondamentale (e connesso a questa anche un intervallo di tempo minimo fondamentale). Abbiamo voluto esaminare se, mettendoci da questo punto di vista, fosse possibile ricavare qualche risultato interessante nello studio del moto dell'elettrone. In relazione a ciò ci siamo proposti di stabilire un'equazione per il moto dell'elettrone prendendo come punto di partenza la seguente serie di postulati:

1) Esiste una costante reale τ_0 dalle dimensioni di un tempo (intervallo di tempo fondamentale).

⁽³⁾ M. SCÖHNBERG: *Phys. Rev.*, **67**, 211 (1945); C. I. ELIEZER e A. W. MAILVAGANAM: *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **41**, 148 (1945); P. CALDIROLA: *Nuovo Cimento*, **5**, 99 (1948); A. LOINGER: *Nuovo Cimento*, **6**, 360 (1949).

⁽⁴⁾ C. I. ELIEZER: *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **33**, 173 (1943); G. ZIN: *Nuovo Cimento*, **6**, 1 (1949).

⁽⁵⁾ A. MARCH: *Quantum mechanics of particles and wave fields* (New York, 1951), p. 267 e segg.; A. LANDÉ: *Journ. Franklin Inst.*, **229**, 767 (1940); B. T. DARLING e P. R. ZILSEL: *Phys. Rev.*, **91**, 1252 (1953).

Della nozione di lunghezza elementare, e quindi di un intervallo di tempo elementare, si fa pure uso in tutte le odierne teorie dei campi non locali.

Il punto di vista da noi adottato, che è sostanzialmente quello di DARLING e ZILSEL, non comporta alcuna quantizzazione, nè alcuna concezione di struttura reticolare del continuo spazio-tempo einsteiniano.

2) Una forza, operante su di una particella all'istante τ del tempo proprio di questa, determina un brusco passaggio dallo stato di moto relativo all'istante $\tau - \tau_0$ allo stato di moto relativo all'istante τ . In altri termini le leggi della meccanica connettono grandezze dinamiche della particella relative a punti della linea oraria cronotopica distanti l'uno dall'altro di una lunghezza $s_0 = c\tau_0$.

3) Per $\tau_0 \rightarrow 0$ le nuove equazioni si devono ridurre a quelle della dinamica classica.

4) Le leggi devono essere invarianti relativisticamente.

Per semplicità determiniamo dapprima le leggi del moto dell'elettrone quando si lasci cadere la condizione 4). Detta allora $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$ la forza che agisce sulla particella all'istante t , essa produrrà una variazione sul moto di questa in modo da farle acquistare una quantità di moto $m_0 \mathbf{v}(t)$. Tenendo conto dei postulati 1), 2), 3) assumeremo allora a base della nostra teoria le seguenti equazioni alle differenze finite:

$$(4) \quad \frac{m_0}{\tau_0} [\mathbf{v}(t) - \mathbf{v}(t - \tau_0)] = \mathbf{F}(\mathbf{r}; t).$$

Sviluppiamo $\mathbf{v}(t - \tau_0)$ in serie di potenze crescenti del parametro τ_0 :

$$\mathbf{v}(t - \tau_0) = \mathbf{v}(t) - \tau_0 \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{\tau_0^2}{2} \frac{d^2\mathbf{v}}{dt^2} - \dots$$

In approssimazione zero avremo

$$m_0 \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{r}; t),$$

che evidentemente è l'equazione del moto di una particella sottoposta alla forza esterna \mathbf{F} e senza reazione.

In prima approssimazione avremo

$$m_0 \left[\frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} - \frac{\tau_0}{2} \frac{d^2\mathbf{v}(t)}{dt^2} \right] = \mathbf{F}(\mathbf{r}; t),$$

che si riduce all'equazione di Dirac non relativistica (3), quando si assuma

$$\tau_0 = \frac{4}{3} \frac{e^2}{m_0 c^3}.$$

Detta pertanto R la lunghezza fondamentale della teoria (connessa al tempo τ_0 dalla relazione $\tau_0 = 2R/c$), avremo $R = (2/3)(e^2/m_0 c^2)$, per cui la massa dell'elettrone (evidentemente di natura elettromagnetica) risulterà data da $m_0 = (2/3)(e^2/Rc^2)$.

Si osservi come, considerando tutti i termini dello sviluppo di $\mathbf{v}(t - \tau_0)$, la (4) equivalga ad un'equazione differenziale in cui compariscono derivate di ordine qualsiasi (*).

(*) Ad un'equazione alle differenze finite, equivalente alla (4), è arrivato anche C. I. ELIEZER (*Report Intern. Conf. on Elementary particles*, Bombay, 1950), partendo da un modello (non relati-

Procediamo ora alla generalizzazione dell'equazione (4) in modo da renderla relativisticamente invariante. Tenendo conto che $F_\alpha = (e/c)F_{\alpha\beta}u_\beta$, avremo che il primo membro della (4) dovrà essere sostituito da una nuova espressione X_α , che dovrà soddisfare alle seguenti condizioni:

a) per $v^2/c^2 \rightarrow 0$ le prime tre componenti di X_α si dovranno ridurre a $(m_0/\tau_0)[\mathbf{v}(t) - \mathbf{v}(t - \tau_0)]$;

b) per $\tau_0 \rightarrow 0$ si dovrà avere $X_\alpha \rightarrow (2e^2/3c)[(d^2u_\alpha/ds^2) + u_\alpha u_\beta (d^2u_\beta/ds^2)]$;

c) essendo $F_{\alpha\beta}u_\beta u_\alpha = 0$, dovrà essere $X_\alpha u_\alpha = 0$.

Queste condizioni determinano la X_α che risulta:

$$\begin{aligned} X_\alpha &= \frac{m_0}{\tau_0} \{u_\alpha(\tau) - u_\alpha(\tau - \tau_0) + u_\alpha(\tau)u_\beta(\tau)[u_\beta(\tau) - u_\beta(\tau - \tau_0)]\} = \\ &= -\frac{m_0}{\tau_0} [u_\alpha(\tau - \tau_0) + u_\alpha(\tau)u_\beta(\tau)u_\beta(\tau - \tau_0)], \end{aligned}$$

essendo τ il tempo proprio s/c .

L'equazione relativistica alle differenze finite per il moto dell'elettrone si scrive quindi

$$(5) \quad -\frac{m_0}{\tau_0} [u_\alpha(\tau - \tau_0) + u_\alpha(\tau)u_\beta(\tau)u_\beta(\tau - \tau_0)] = \frac{e}{c} F_{\alpha\beta}u_\beta \equiv F_\alpha.$$

Ammesso poi di poter scrivere l'equazione del moto sotto la forma consueta

$$m_0 c \frac{du_\alpha}{ds} = F_\alpha + R_\alpha,$$

confrontando con la precedente si ha la seguente espressione della forza di reazione

$$R_\alpha = m_0 \left[c \frac{du_\alpha}{ds} + \frac{u_\alpha(\tau - \tau_0) + u_\alpha(\tau)u_\beta(\tau)u_\beta(\tau - \tau_0)}{\tau_0} \right].$$

L'integrazione dell'equazione (5), o anche di quella corrispondente non relativistica (4), è in generale molto complicata. Si può però osservare che la legge del moto che se ne ricava è completamente determinata assegnando il valore di due costanti

vistico) di elettrone caratterizzato dalle equazioni:

$$m_0 \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \frac{d^2\mathbf{v}}{dt^2} + \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3 R} \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{(2R/c)}{(n+1)!} \frac{d^n \mathbf{v}}{dt^n} = \mathbf{F},$$

che formalmente possono scriversi:

$$\frac{m_0 c}{eR} \left(1 - \exp \left[-2R \frac{d}{dt} \right] \right) \mathbf{v}(t) = \mathbf{F}.$$

Quest'ultime, per le note proprietà dell'operatore $\exp[-\lambda(d/dt)]$, e cioè $\exp[-\lambda(d/dt)]f(t) = f(t - \lambda)$, risultano equivalenti alle (4).

a priori arbitrarie e ciò corregge il difetto più grave della vecchia teoria ⁽⁷⁾. Finora siamo riusciti ad integrare l'equazione non relativistica (4) in alcuni casi particolari. Eccone i risultati:

1) *Particella libera* ($\mathbf{F} = 0$):

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(t - \tau_0) = \text{costante}.$$

Il moto è rettilineo e uniforme.

2) *Particella sottoposta a forza costante* ($\mathbf{F} = \mathbf{K}$)

$$\frac{\mathbf{v}(t) - \mathbf{v}(t - \tau_0)}{\tau_0} = \frac{\mathbf{K}}{m_0} = \text{costante}.$$

Il moto è uniformemente accelerato.

3) *Particella sottoposta a una forza dipendente dal tempo* [$\mathbf{F} = \mathbf{F}(t)$]:

$$\mathbf{v}(n\tau) = \mathbf{v}_0 + \frac{\tau_0}{m_0} \sum_1^n \mathbf{F}(i\tau).$$

In particolare:

Se $\mathbf{F}(t) = \mathbf{K} \exp[-\alpha t]$:

$$\mathbf{v}(n\tau_0) = \mathbf{v}_0 + \frac{\tau_0}{m_0} \mathbf{K} \frac{1 - \exp[-\alpha n\tau_0]}{\exp[\alpha\tau_0] - 1}.$$

Se $\mathbf{F}(t) = \mathbf{K} \sin \omega t$:

$$\mathbf{v}(n\tau_0) = \mathbf{v}_0 + \frac{\tau_0}{m_0} \mathbf{K} \frac{\cos \omega\tau_0 - \cos((2n+1)/2)\omega\tau_0}{2 \sin(\omega\tau_0/2)}.$$

4) *Particella in un campo magnetico costante* ($\mathbf{F} = e\mathbf{v} \wedge \mathbf{H}_0$):

$$\mathbf{v} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} \quad \text{con} \quad \begin{cases} \dot{x}(n\tau) = v_0 \left(1 + \frac{\tau_0^2 e^2 H_0^2}{m_0^2} \right)^{-n/2} \cos \left[n \arctg \left(\frac{\tau_0 e H_0}{m_0} \right) \right] \\ \dot{y}(n\tau) = v_0 \left(1 + \frac{\tau_0^2 e^2 H_0^2}{m_0^2} \right)^{-n/2} \sin \left[n \arctg \left(\frac{\tau_0 e H_0}{m_0} \right) \right]. \end{cases}$$

5) *Particella sottoposta a una forza elastica di richiamo* ($\mathbf{F} = -kx$).

La soluzione della (4) risulta:

$$x(t) = A e^{\alpha t},$$

(7) Questa affermazione è vera in quanto il postulato 2) ci autorizza a escludere le soluzioni periodiche dell'equazione $f(t) - f(t - \tau_0) = 0$. Ciò è in relazione anche al fatto che, assunto come origine dei tempi $t = 0$, le funzioni sono definite solo per i valori di $t = n\tau_0$.

essendo α una costante complessa determinata dall'equazione trascendente:

$$\alpha(1 - \exp[-\alpha\tau_0]) = -\frac{\tau_0 k}{m_0};$$

ne consegue che il moto dell'elettrone è oscillatorio smorzato.

6) *Elettrone lanciato lungo una retta contro un protone fisso*

$$\left(F = -\frac{e^2}{x^2} \varepsilon(x) \quad \text{con} \quad \varepsilon(x) = \begin{cases} +1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases} \right),$$

Pur non essendo riusciti a risolvere esplicitamente l'equazione (4) corrispondente, crediamo tuttavia di poter affermare, in base a una discussione qualitativa di questa equazione, che il moto risulta ancora oscillatorio smorzato e che conseguentemente non si hanno le soluzioni non fisiche che caratterizzano le corrispondenti equazioni (2) e (3).

Aggiunta in bozza.

Il Prof. WATAGHIN ci ha cortesemente segnalato un lavoro di F. MÖGLICH e R. ROMPE in *Zeits. f. Phys.*, **113**, 740 (1939), nel quale si studia il problema del moto dell'elettrone mediante un'equazione (non relativistica) alle differenze finite. Tale equazione, assai più complessa della (4), è basata su un'ipotesi di « struttura granulare » del tempo essenzialmente diversa del postulato 2) da noi assunto.

Interaction of π^+ Mesons in Photographic Plates (I).

A. MINGUZZI, G. PUPPI and A. RANZI

Istituto di Fisica dell'Università - Bologna
Istituto Nazionale di Fisica Nucleare - Sezione di Padova

(ricevuto l'11 Novembre 1953)

In a systematic survey of photographic plates exposed to the 62 MeV π^+ mesons beam of the Nevis cyclotron, besides stars, inelastic and elastic scattering, which will be discussed in forthcoming papers, some peculiar events have been observed which will be reported here.

a) *Scattering of π^+ on H.* - 22 of such events have been selected both « scanning along the track » and by « area scanning ». The scatterings on H

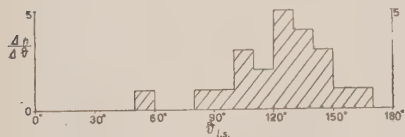


Fig. 1. - Number of (π^+, H) scattering versus angle in lab. system

were identified owing to the characteristics of the two body collisions (1).

We have plotted in fig. 1 the angular distribution as a block diagram showing the number of scatterings per 10° of interval in the lab. system and in fig. 2 the

relative differential cross-section in c.m. system; i.e. the quantity $(4\pi/\sigma) \cdot (d\sigma/d\Omega)$ as a function of the angle of scattering in the c.m. system.

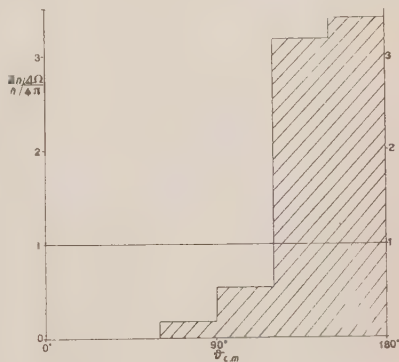


Fig. 2. - (π^+, H) differential scattering cross-section in c.m. system.

It is easy to see, in both representations, that the angular distribution is strongly peaked backward. This result is in agreement with similar findings at 75 MeV by GOLDBABER (2) and at 47 MeV

(1) G. GOLDBABER: *Phys. Rev.*, **89**, 1187 (1953).

(2) Private communication. We are grateful to dr. GOLDBABER for many information on his work.

by LORD and WEARER⁽³⁾ with photographic plates, but is at variance with the results of the Brookhaven group at 53 MeV in diffusion cloud chamber⁽⁴⁾. On the other hand, recent experiments with counter at 58 MeV by the Columbia group⁽⁵⁾ and at 40 MeV by the Rochester group⁽⁶⁾ show a similar strong forward-backward asymmetry.

STEINBERGER and coworkers⁽⁷⁾ have discussed the phase shift analysis of the scattering data at 58 MeV. Since the statistical accuracy of their data is much greater and our angular distribution agrees with their's, we do not attempt here to repeat the calculations.

The distribution as shown in fig. 2 is independent of the knowledge of the absolute cross-section, but we can try to estimate this later. Out of the 22 scatterings, 5 were found «scanning along the track» giving directly a mean free path in G.5 emulsion of 1039 ± 460 cm. The remaining 17 events were found «by area scanning» as a by-product of a systematic scanning for elastic scattering, with projected angle of more than 10° in which 541 stars+inelastic scatterings were also found. Since the mean free path for all incoherent processes was found, «scanning along the track», to be of 30.8 ± 2.2 cm, we can calculate, on the base only of the relative frequency of the events an «equivalent» mean free path in the scanning by area, for π^+ +H scatterings of 1054 ± 255 cm.

The two data combined give a total mean free path in our G.5 emulsion of 1050 ± 220 cm, which corresponds to an uncorrected value for the cross-section of 29 mb. This result must be corrected for the moisture content that looks to be very high on the base of the non uniform distribution of the events of interest inside the plates.

Taking a 50% of moisture content as a prudential figure, we obtain a corrected value of 22 ± 5 mb for the cross-section at a mean energy of 65 MeV. This value is in agreement with the most recent determinations.

b) Stops of π^+ . — In a total of 712 incoherent processes as stars and inelastic scatterings observed, 6 stops in flight were identified, two of which by scanning along the track. BERNARDINI and cow.⁽⁸⁾ found none on 115 stars + inelastic scatterings. Owing to the differences in the statistics the two results can agree.

Supposing that these events represent charge exchange phenomena inside the nuclear matter, with the exit of a π^0 and without visible excitation we can estimate the elementary cross-section per neutron.

Assuming a mean free path in nuclear matter for π^+ as well as for π^0 equal to $2.50r_0$; the probability that a π^0 escapes absorption before leaving the nucleus is 0.32 for light elements and 0.16 for the heavy ones⁽⁹⁾. Taking into account that the relative number of interactions in light and heavy elements is 0.25 and 0.75, it is possible to calculate a mean free path for charge exchange phenomena in nuclear matter of $\lambda \sim 30r_0$ that corresponds to an elementary cross-section for the process $\pi^+ + N \rightarrow P + \pi^0$ of roughly 5 mb.

(3) We thank Dr. LORD and Dr. WEARER for sending us their unpublished results. We wish to thank also Prof. FERMI for information on the progress of the Chicago work.

(4) E. C. FOWLER, W. B. FOWLER, R. P. SHUTT, A. M. THORNDIKE and W. L. WHITE-MORE: *Phys. Rev.*, **91**, 135 (1953).

(5) D. BODANSKY, A. SACHS and J. STEINBERGER: *Phys. Rev.*, **90**, 996 (1953).

(6) J. FERRY and C. E. ANGELL: *Phys. Rev.*, **91**, 1289 (1953).

(7) A. BODANSKY, A. SACHS and J. STEINBERGER: *Phys. Rev.*, **90**, 997 (1953).

(8) G. BERNARDINI and F. LEVY: *Phys. Rev.*, **84**, 610 (1952).

(9) E. CLEMENTEL and G. PUPPI: *Nuovo Cimento*, **10**, 197 (1953).

It is interesting to note that this magnitude for the cross-section inside the nuclear matter is not in disagreement with the value on free nucleon, as can be deduced, by charge symmetry arguments from the measured cross-section ⁽¹⁰⁾ for the process $\pi^- + P \rightarrow N + \pi^0$, also taking into account on one hand the inefficiency in the scanning by area for this kind of phenomena and on the other hand

the possibility that some of the stops observed (at least 1 with 4 low energy electrons) is due to starless capture.

We wish to thank warmly Professor BERNARDINI, who provided us with the plates.

⁽¹⁰⁾ A. ROBERTS and J. TINLOT: *Phys. Rev.*, **90**, 951 (1953).

LIBRI RICEVUTI E RECENSIONI

K. MAYRHOFER — *Inhalt und Maß*,
Mit 17 Figuren. VIII. 269 Seiten.
Springer. Wien, 1952.

La lettura di questo libro permette di valutare i grandi progressi che la teoria assiomatica della misura degli insiemi ha compiuto a partire dall'epoca, ormai lontana (1918), in cui C. CARATHÉODORY ne tracciava le linee direttive. Ma, mentre il CARATHÉODORY limitava la sua teoria agli insiemi di punti dello spazio euclideo n -dimensionale, l'Autore invece, ad imitazione di altri, procede a un'ulteriore generalizzazione, in quanto gli insiemi da Lui considerati sono insiemi di elementi appartenenti ad uno spazio astratto S arbitrariamente prefissato.

L'Autore studia, con grande precisione di dettagli, dapprima (Cap. I) le proprietà d'una funzione d'insieme $i(A)$, non negativa (e nulla sull'insieme vuoto), chiamata « *Inhaltsfunktion* » o semplicemente « *Inhalt* » (= *contenuto*), definita al variare di A in un corpo k d'insiemi, cioè in una famiglia k d'insiemi tale che, per ogni coppia d'insiemi A_1, A_2 appartenenti a k , anche la somma $A_1 + A_2$, il prodotto $A_1 A_2$ e la differenza $A_1 - A_2$ appartengono a k . Per definizione, $i(A)$ è *additiva su k* cioè tale che

$$i(A_1 + A_2) = i(A_1) + i(A_2)$$

(qualunque siano A_1 e A_2 , disgiunti, in k).

Condizioni particolari, in tale studio, vengono successivamente introdotte, in quanto da un lato si precisa k in un σ -corpo, cioè in un corpo tale che, se $\{A_n\}$ ($n = 1, 2, \dots$) è una qualunque successione d'insiemi di k , anche la somma

$$\sum_n^{1, \infty} A_n$$

appartiene a k , d'altro lato $i(A)$

è completamente additiva in k , cioè

$$\text{tale che } \left(\sum_n^{1, \infty} A_n \right) = \sum_n^{1, \infty} i(A_n) \text{ (supposti gli}$$

A_n due a due disgiunti). In queste ipotesi particolari, $i(A)$ è chiamata una « *Maßfunktion* » o semplicemente « *Maß* » (= *misura*) e indicata col simbolo $m(A)$. Per un qualunque insieme B d'elementi di S , con la sola condizione che esista un insieme A (del corpo k) che lo contenga, vien definito il *contenuto esterno* $\bar{i}(B)$ = estremo inf. di $i(A)$, al variare di A contenente B , e il *contenuto interno* $\underline{i}(B)$ = estremo sup. di $i(A)$, al variare di A contenuto in B . Se $\bar{i}(B) = \underline{i}(B)$, può porsi $i(B) = \bar{i}(B) = \underline{i}(B)$, ottenendosi così il prolungamento del contenuto $i(B)$ su una certa famiglia d'insiemi B , e tale famiglia è anch'essa un corpo. Analoghe definizioni e analogo prolungamento vengono studiati per una misura $m(B)$, al variare di B in una certa famiglia di sottoinsiemi degli insiemi A (del σ -corpo k).

L'applicazione della teoria generale del Cap. I, al caso che S sia uno spazio euclideo n -dimensionale, conduce alla teoria della misura (contenuto), meglio

detta « estensione » dagli autori italiani (M. PICONE), secondo PEANO-JORDAN (Cap. II), a quella secondo BOREL, infine a quella secondo LEBESGUE (Cap. III). Queste teorie ormai classiche, troppo note perchè valga qui la pena di ricordarle, sono il fondamento della teoria moderna dell'integrazione: esse vengono qui studiate con grande profondità, con ricchezza di dettagli e non trascurando di dare, nei punti più importanti, esempi illustrativi accuratamente scelti. Il Capitolo IV studia le proprietà che presentano il contenuto (l'interno e l'esterno) di PEANO-JORDAN e, più ancora, la misura (l'interna e l'esterna) di LEBESGUE, per effetto d'una qualunque trasformazione lineare. Il Cap. V è dedicato ad un confronto critico fra la teoria dell'Autore e quella esposta in altri classici trattati. Nel Cap. VI sono dati gli elementi dell'algebra di BOOLE, nei suoi sviluppi più moderni. Un'appendice, dedicata ad una ampia trattazione degli insiemi di Borel, chiude questo attraente libro, veramente ammirevole per chiarezza d'esposizione, per tono scientifico elevato, per accuratezza nei dettagli e per aggiornamento sui progressi più recenti.

T. VIOLA

J. B. BIRKS - *Scintillation counters*, pp. VIII-149, Pergamon Press, London, 1953.

Il contatore a scintillazione, uno dei primi strumenti di ricerca nel campo della fisica nucleare, dopo una lunga parentesi durata una quindicina di anni durante i quali era stato sopravvanzato, nella sua primitiva versione visuale, da altri più efficienti rivelatori di particelle, è tornato oggi nei laboratori.

Questo ritorno è dovuto in gran parte alla odierna possibilità di costruire i fotomoltiplicatori, rivelatori di debolissimi impulsi di luce, aventi elevate caratteristiche tecniche; oltre alla scoperta delle

proprietà scintillanti di cristalli e di soluzioni.

Alle possibilità di questa nuova tecnica, ai risultati raggiunti, allo studio del meccanismo di emissione di luce da parte degli scintillatori è dedicato il libro di BIRKS.

I vari capitoli, a cominciare dalla introduzione storica, tendono a dare in succinto tutte le possibili informazioni a carattere applicativo, sia sui fotomoltiplicatori e gli scintillatori presi a sè, sia in relazione ai possibili usi.

Nella larga parte del libro dedicata al meccanismo con cui avvengono le scintillazioni, è da notare l'esposizione del notevole contributo portato dall'Autore alle ricerche in questo campo.

Gli altri pregi del libro, stampato a tempo di primato, vanno dalla estesa bibliografia al buon numero di informazioni, dati sperimentali e valutazioni in breve dei limiti attuali della tecnica, comodissimi per chi deve impratichirsi con questo strumento di ricerca.

Un'ultima osservazione riguarda la simpatica dedica del libro che è bene trascrivere direttamente, perchè qualsiasi traduzione la guasterebbe: « This book is dedicated to "et al.", that great team of scientists, who in the interests of brevity, remain anonymous (except in the bibliography)! ».

G. CORTELLESA

O. KLEMPERER - *Electron Optics*. 2nd edition, XIII+471 pp., 167 fig. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1953.

Questo trattato, che fa parte della Collezione Cambridge Monographs on Physics, è l'estensione e praticamente il completo rifacimento di un primo volume scritto fin dal 1938 quando, come dice l'Autore nella prefazione, « l'ottica elettronica era al primo stadio del suo sviluppo ».

Sempre secondo l'Autore il libro dovrebbe servire « al duplice scopo di introdurre lo studioso al particolare argomento in oggetto e di essere guida al ricercatore o al progettista in questo campo, fornendogli i principi fondamentali, le principali informazioni quantitative e una guida alla letteratura specializzata dove possono essere trovati tutti i particolari che lo interessano ».

In realtà solo il secondo scopo pare, e brillantemente, conseguito. Il libro ha un'impostazione essenzialmente pratica; mentre le dimostrazioni sono spesso solo accennate, le formule finali delle analisi quantitative sono ampiamente discusse, di esse viene quasi sempre indicato lo specifico campo di utilità nelle pratiche applicazioni, e fornito un accenno dei metodi sperimentali mediante i quali la loro validità può essere controllata. Inoltre con numerosi esempi concreti si insegnano a sfruttare praticamente gli strumenti di lavoro forniti dai principi generali. Questi ultimi sono invece ricavati in modo piuttosto sommario ed in questo senso non pare che il libro possa essere utilmente diretto verso chi per la prima volta abbordi l'argomento e voglia criticamente assimilarlo.

Il ricercatore troverà invece nel libro un ausilio prezioso per la mole di informazioni, e per le ricchissime e precise citazioni bibliografiche, estese a 500 voci.

È inoltre una gradita novità quello di veder unificati in un solo trattato i campi dell'ottica elettronica vera e propria, della dinamica delle particelle quando la carica spaziale non possa venir trascurata (argomenti del noto libro *Theory and design of electron beams* del PIERCE), della spettrografia di massa, dei tubi elettronici, etc.

Il libro è diviso in dodici capitoli.

Il primo introduce brevemente i fondamentali teorici dell'ottica elettronica.

Il secondo tratta degli elementi cardinali di una lente nell'approssimazione gaussiana e i metodi sperimentali per la loro individuazione.

Il terzo riassume i numerosi metodi per il tracciamento dei campi e per la costruzione per via grafica o numerica della traiettoria dell'elettrone in essi. Chiude il capitolo un brevissimo cenno sui metodi di « sintesi » degli elettrodi capaci di impartire all'elettrone una traiettoria assegnata.

Nel quarto capitolo vengono illustrate le proprietà delle più comuni lenti elettrostatiche.

Nel quinto, dopo l'introduzione del potenziale di Störmer, si passano in rassegna le proprietà delle più comuni lenti magnetiche.

I capitoli sesto e settimo sono dedicati alle aberrazioni, trattate da un punto di vista essenzialmente sperimentale.

L'ottavo e nono capitolo sono dedicati alla carica spaziale nell'ottica elettronica e particolarmente sviluppato è il progetto di intense sorgenti di elettroni.

Il decimo capitolo è dedicato all'ottica dei sistemi bidimensionali caratterizzati da linee anziché da punti focali. Vengono discussi anche in questo caso gli effetti dovuti a carica spaziale e il progetto di sorgenti lineari di elettroni. Le considerazioni svolte sono applicate a tubi a raggi X, a tubi elettronici a fascio e a fotomoltiplicatori. Chiude il capitolo un cenno sul metodo dell'« analogia inversa » che permette mediante un modello in vasca elettrolitica la determinazione di campi magnetici bidimensionali a vorticità non nulla.

L'undicesimo capitolo, tratta dei campi elettrici e magnetici di deflessione e delle loro proprietà focalizzanti. Le deduzioni sono applicate alla spettrografia di massa, alle deflessioni del fascetto elettronico nei tubi oscillografici, e alla stabilità delle orbite negli acceleratori di particelle.

Il capitolo dodicesimo dà un quadro descrittivo finale delle più importanti applicazioni dell'ottica elettronica nella ricerca e nell'industria.

L'edizione a cura della Cambridge University Press è molto curata e due

indici oltre l'imponente bibliografia rendono molto agevole la consultazione dell'opera.

EMILIO GATTI

F. O. RICE e E. TELLER—*La struttura della materia*. Edizioni Einaudi, Biblioteca di cultura scientifica, vol. XXXVII, Torino, 1953; pagg. 543.

Nel corso dei due ultimi decenni, parallelamente al progressivo sviluppo della meccanica quantistica, è via via divenuto possibile rendersi conto di una parte sempre maggiore dei fenomeni chimico-fisici connessi con la struttura atomica della materia. Anche nei casi — invero tutt'altro che sporadici — in cui il problema fisico si traduce in uno matematico troppo difficile per essere risolto in modo esatto, è possibile di regola gettar luce sugli aspetti essenziali e più interessanti del problema, attraverso l'impiego di opportuni metodi di approssimazione. Però, causa l'enorme difficoltà dell'algoritmo matematico richiesto per la risoluzione sia pure approssimata della maggior parte dei problemi concernenti la struttura della materia, studi di questo tipo sono finora rimasti relegati, esclusivamente o quasi, al mondo degli specialisti.

Con questo libro « sulla struttura della materia » gli AA. si propongono evidentemente di rendere accessibili ad una classe più vasta di lettori, le conoscenze fino ad oggi acquisite in questo campo della fisica. Il libro infatti è scritto quasi senza fare ricorso all'algoritmo matematico, riportando solo occasionalmente delle formule atte a mostrare l'andamento dei fenomeni discussi, indicando soltanto le linee essenziali dei ragionamenti che conducono ai risultati finali e facendo frequentemente appello all'intuizione, che qua e là vien sorretta da diagrammi e da rappresentazioni grafiche.

Oltre ad un breve capitolo introduttivo (in verità troppo breve per « introdurre » il lettore inesperto ai concetti della fisica quantistica...) l'opera comprende ancora dodici capitoli. Il primo di questi contiene una rapida trattazione dell'atomo di idrogeno dal punto di vista della meccanica quantistica. I concetti di « autofunzione di stato », di « stati degeneri », di « ortogonalità » vengono qui introdotti (forse di nuovo in modo un po' troppo succinto per il lettore che con essi non abbia alcuna familiarità) per essere poi utilizzati ampiamente nel corso del libro. Nel capitolo successivo, dedicato al sistema periodico degli elementi, si introduce il principio di Pauli (dapprima per il caso semplice in cui si trascura lo spin dell'elettrone, e poi nella sua formulazione più generale) mettendone chiaramente in luce alcuni degli aspetti più significativi, quali l'identità, che da esso consegue, tra tutti gli elettroni. Seguono alcuni capitoli nei quali si presenta in forma sobria e piuttosto rapida quanto di essenziale si conosce sul moto dei nuclei nelle molecole, sul comportamento degli atomi e delle molecole nei campi elettrici, sulle proprietà magnetiche della materia e sulle forze attrattive di van der Waals. Con molta maggior diffusione sono invece trattati gli argomenti concernenti il legame chimico (dove vengono illustrati e discussi i metodi degli orbitali molecolari e degli orbitali di valenza), le forze agenti nei solidi, le vibrazioni molecolari (spettri infrarossi, spettri rotazionali e vibrorotazionali, effetto Raman, ecc.) e gli spettri elettronici. Il penultimo capitolo del libro, piuttosto ampio ma proporzionato alla vastità dell'argomento in esso trattato, è dedicato alla chimica nucleare.

L'opera termina con una rapida ma assai suggestiva descrizione dello stato della materia nelle stelle, e con un cenno alla teoria dell'universo in espansione e alle possibili spiegazioni sull'origine degli elementi.

La sensazione che si ha leggendo il

libro — e che non può essere molto smi-
nuita dalla natura degli argomenti trat-
tati nell'ultimo capitolo — è che gli AA.
abbiano voluto con esso perseguire anche
un fine pratico: quello cioè di avvicinare
al mondo della fisica quantistica i ricer-
catori ed i tecnici che in certe industrie
(per esempio, chimiche e metallurgiche)
hanno frequentemente occasione di im-
battersi in problemi connessi con le pro-
prietà della materia. Come se gli AA.,
memori degli immensi benefici che da
mezzo secolo a questa parte l'industria
ha tratto dalla corretta applicazione delle
leggi dell'elettromagnetismo, si fossero
proposti di preparare il terreno sul quale
i « nuovi ingegneri » dovranno operare
applicando le leggi della nuova mecca-
nica.

Si deve però osservare che a dispetto
del tono sobrio e discorsivo con cui è
scritta quasi ogni parte del libro, la let-
tura di alcuni capitoli è tutt'altro che
facile per chi non sia in una qualche
misura iniziato agli argomenti in essi
trattati.

Di queste difficoltà di lettura sono
forse responsabili, principalmente, le dif-
ficoltà intrinseche dei numerosi concetti
che inevitabilmente occorre introdurre
nella stesura di un'opera di questo ge-
nere e la vastità degli argomenti discussi.
Ma qualunque sia la loro causa, resta il
dubbio che lo studio dell'opera possa es-
sere per il lettore non fisico utile nella
misura che sarebbe desiderabile ai fini
del superamento di quella barriera tuttora
esistente tra il mondo delle applicazioni
ed il mondo della fisica quantistica.

Il libro è invece indubbiamente assai
istruttivo per il giovane fisico e per il
chimico-fisico che, già in possesso delle
idee fondamentali della meccanica quan-
tistica, troverà in esso un quadro vasto
e completo delle attuali conoscenze sulla
proprietà della materia.

W. GLASER — *Grundlagen der Elektro-
nenoptik*. Un vol. in-8° di x-699 pa-
gine, ed. Springer, Wien 1952.

I trattati di ottica elettronica apparsi
nel ventennio di vita di questa giovane
scienza si dividono (assai più nettamente
che quelli di ottica della luce) in due cate-
gorie abbastanza distinte, secondo che il
loro autore ebbe in vista principalmente
l'aspetto tecnico o quello fisico-matema-
tico della materia. Il volume del GLASER
è uno dei migliori rappresentanti, e certo
il più completo, di quest'ultimo indirizzo.
Esso si propone di esporre in modo siste-
matico e rigorosamente deduttivo i me-
todi di calcolo delle traiettorie e delle
onde elettroniche, così da mettere in
grado lo studioso di leggere criticamente
la letteratura specializzata e da fornire
al progettista tutto ciò che occorre per
il calcolo dettagliato di uno strumento
ottico-elettronico. Le descrizioni di appa-
recchi sono ridotte al minimo e confinate
a un capitolo introduttivo.

Nonostante questo carattere altamen-
te fisico-matematico e l'esigenza di rigore
continuamente tenuta presente dall'Au-
tore, il libro è di lettura relativamente
facile. Il GLASER ha infatti avuto cura di
esporre i principii con grande chiarezza,
senza presupporre nel lettore speciali co-
gnizioni di fisica o di matematica che va-
dano oltre (per intenderci) quelle for-
nite ai nostri studenti nel primo biennio
di fisica; inoltre ha svolto le deduzioni
matematiche senza economia di spiega-
zioni dei passaggi analitici e senza evitare
ripetizioni ove possano facilitare la com-
prensione e risparmiare fastidiosi rinvii.

Lo spazio risparmiato sacrificando la
parte descrittiva e strumentale, nonché la
mole considerevole del libro, consentono
al GLASER di svolgere la teoria dell'ottica
elettronica con un'ampiezza assai mag-
giore del consueto. Si trovano perciò in
questo volume molti argomenti che non
avevano ancora avuto sistemazione trat-

tatistica, tra cui non pochi contributi originali dell'Autore.

Il volume è diviso in tre parti. La prima, dopo due capitoli sui principii generali dell'ottica elettronica, tratta esaurientemente, nell'approssimazione di Gauss, l'ottica dei campi elettrici e magnetici con un asse di simmetria. A caratterizzare l'indole del trattato, si può rilevare, ad esempio, che non solo sono stabilite e discusse le varie forme delle equazioni delle traiettorie parassiali, i loro metodi di integrazione e le loro applicazioni a diversi tipi di lenti, ma inoltre i concetti di « fuoco » e « distanza focale » di una lente elettronica sono discussi criticamente, e sono trattate a fondo varie questioni ad essi relative che non hanno l'analogo nell'ottica ordinaria è che di solito vengono sorvolate nei trattati di ottica elettronica. Particolarmente sviluppata, come è naturale, è la trattazione di quella speciale schematizzazione delle lenti magnetiche che è generalmente nota col nome dell'Autore e che si è rivelata di tanta pratica utilità. Un capitolo speciale è dedicato alle questioni di « apertura » nel microscopio elettronico; un altro alla aberrazione cromatica.

La seconda parte del libro riguarda la teoria delle aberrazioni geometriche (del terzo ordine) che sono trattate sistematicamente col metodo hamiltoniano. In questa parte si trovano anche i soli due capitoli del libro dedicati a campi agenti essenzialmente in direzione trasversale al moto: uno di essi tratta la teoria della (debole) deflessione elettrica o magnetica di un fascetto elettronico

quale si verifica, per esempio, negli oscillografi catodici, e le aberrazioni che essa introduce nel foccheggiamento del fascetto; l'altro riguarda invece il foccheggiamento di fasci elettronici ad asse circolare. Peccato che l'Autore tratti questi due problemi solo nella approssimazione non relativistica, e tralasci inoltre la teoria generale dei campi deflettori che si applica, per esempio, nella spettrometria di massa.

La terza parte del libro, dal titolo « Ottica Elettronica e Meccanica Ondulatoria », fornisce al lettore un'ampia e in gran parte originale trattazione dei fondamenti della meccanica ondulatoria e della loro applicazione alla formazione delle immagini elettroniche. In particolare, è trattata in dettaglio la teoria del potere risolutivo del microscopio elettronico in relazione sia alla diffrazione che alla aberrazione sferica. I capitoli introduttivi di questa terza parte possono interessare il fisico teorico anche indipendentemente dalla loro applicazione all'ottica elettronica.

Il manoscritto di quest'opera, come racconta l'Autore nella prefazione, era stato scritto in una prima redazione avanti la guerra. Avendone varie circostanze ritardato a più riprese la pubblicazione fino ad oggi, l'Autore l'ha per due volte rimaneggiato e completato. Il libro però non serba quasi traccia di così complicate vicende, e si presenta ben ordinato e generalmente aggiornato. La veste tipografica è quella ben nota, nitidissima, della casa Springer.

E. PERSICO

IL NUOVO CIMENTO

INDICI

DEL VOLUME X - SERIE IX

1953

PRINTED IN ITALY

INDICE SISTEMATICO PER NUMERI SUCCESSIVI DEL PERIODICO

N. 1, 1° GENNAIO 1953

| | |
|--|--------|
| J. RAYSKI - On a Regular Field Theory | pag. 1 |
| R. L. INGRAHAM - Spinor Relativity | » 27 |
| E. R. CAIANIELLO - On the universal Fermi-Type interaction (III) | » 43 |
| G. CHIAROTTI and L. GIULOTTO - Nuclear signals dependence on the radio-frequency field and paramagnetic catalyst | » 54 |
| G. BELLIBONI e B. VITALE - Distribuzioni angolari dei rami neri e grigi in stelle di media ed alta energia | » 72 |

Note Tecniche:

| | |
|---|------|
| E. GATTI, G. PERONA e A. PERSANO - Generatore impulsabile di neutroni | » 80 |
|---|------|

Lettere alla Redazione:

| | |
|---|-------|
| A. A. K. IBRAHIM and A. M. KABIEL - On the Oscillating Cylinder Viscosimeter | » 87 |
| J. SING - A note on the Raman Spectrum of Thianthrene in Solution | » 89 |
| J. RZEWUSKI - Relativistic Quantum Dynamics of a System of Interacting Particles | » 90 |
| F. FERRARI and C. VILLI - On the Excitation Energy of a Heavy Nucleus Described by a Real Fermi Gas | » 94 |
| A. CARRELLI and F. PORRECA - Ultrasonic grating remaining after stopping the supersonic waves - (II) | » 98 |
| A. BRACCI and E. L. ZIMMER - Drift Velocity of Electrons in BF_3 | » 103 |
| A. LOVATI, A. MURA, C. SUCCI and G. TAGLIAFERRI - A Search for the Production of Penetrating Secondaries by μ -Mesons Underground | » 105 |
| M. LADU - Stelle da protoni di alta energia in emulsioni nucleari | » 108 |

| | |
|--|-------|
| <i>Libri ricevuti e Recensioni</i> | » 111 |
|--|-------|

N. 2, 1° FEBBRAIO 1953

| | |
|--|----------|
| E. M. WILLIAMSON - Energy in the Nuclear Field | pag. 113 |
| F. C. ROESLER and C. B. A. MCCUSKER - On the Growth of a Cosmic Ray Initiated Jet in a Nucleus | » 127 |
| S. GALLONE and C. SALVETTI - Liquid Drop Behaviour of an Independent Particle Nuclear Model | » 145 |

| | |
|---|----------|
| E. GROSSETTI - Sul modo di vibrazione della superficie di una lamina di quarzo piezoelettrico | pag. 151 |
| S. ALBERTONI e M. CUGIANI - Sul problema del cambiamento di variabili nella teoria delle distribuzioni (II) | » 157 |

Lettere alla Redazione:

| | |
|---|-------|
| A. GAMBA and V. WATAGHIN - A Selection Rule for the Reaction ${}^6\text{Li}(\gamma d){}^4\text{He}$ | » 174 |
| A. KIND - A proposito della dinamica nucleare | » 176 |
| G. POIANI e C. VILLI - Nota sullo sparpagliamento laterale degli sciami alle alte energie | » 179 |
| J. RZEWUSKI - On Differential Conservation Laws in Non-local Field Theories | » 182 |

| | |
|---|-------|
| <i>Proposte e discussioni</i> | » 186 |
|---|-------|

| | |
|--|-------|
| <i>Libri ricevuti e Recensioni</i> | » 193 |
|--|-------|

N. 3, 1° MARZO 1953

| | |
|--|----------|
| E. CLEMENTEL e G. PUPPI - Interazione con i nuclei e produzione di mesoni π | pag. 197 |
| A. BONETTI, N. DALLAPORTA, M. MERLIN e G. DASCOLA - Produzione di mesoni in materiali condensati diversi | » 215 |
| G. STEPHENSON and C. W. KILMISTER - A Unified Field Theory of Gravitation and Electromagnetism | » 230 |
| P. BUDINI - On the Energy Lost by a Relativistic Ionizing Particle in a Material Medium and on the Čerenkov Radiation | » 236 |
| S. PARTHASARATHY, A. F. CHHAPGAR and HARKRISHAN SINGH - Dispersion of Ultrasonic Velocity in Some Organic Liquids | » 260 |
| S. PARTHASARATHY, D. SRINIVASAN and S. S. CHARI - Absorption of Ultrasonic Waves in Liquids at 5MHz from Thermal Considerations | » 264 |
| P. G. BORDONI - Dipendenza delle autofrequenze di un solido dalla temperatura e dal volume, secondo la meccanica statistica | » 268 |
| M. AGENO, G. CORTELESSA e R. QUERZOLI - Sezione d'urto totale di alcuni elementi per neutroni di 14 MeV | » 281 |
| R. STROFFOLINI - Sul contributo alla componente elettronica della radiazione cosmica nell'atmosfera derivante dal decadimento delle particelle μ | » 300 |
| H. MORINAGA and W. F. FRY - Nuclear Capture of Negative μ -Mesons in Photographic Emulsions | » 308 |
| L. MICHEL - Selection Rules Imposed by Charge Conjugation | » 319 |

Note Tecniche:

| | |
|--|-------|
| C. MILONE - Un odoscopio meccanico | » 340 |
|--|-------|

Lettere alla Redazione:

| | |
|---|-------|
| G. OLIVELLI - Spettro Raman di bassa frequenza dell'aragonite | » 343 |
|---|-------|

| | |
|---|----------|
| A. BONETTI, R. LEVI SETTI, M. PANETTI and G. TOMASINI - Observation of the Decay at Rest of a Heavy Particle | pag. 345 |
| P. STOLL und M. WÄCHTER - Die Energieabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts der Reaktion $\text{Li}^7(\gamma, \alpha)\text{H}^3$ | » 347 |
| M. SCHÖNBERG - A Generalization of the Quantum Mechanics | » 350 |
| G. STEPHENSON - Affine Field Structure of Gravitation and Electromagnetism | » 354 |
| <i>Addenda</i> | » 356 |

N. 4, 1° APRILE 1953

| | |
|--|----------|
| I. F. QUERCIA and B. RISPOLI - Zenithal Dependence of the Penetrating Component of Cosmic Radiation | pag. 357 |
| D. CADORIN - Sulla componente elettronica della radiazione cosmica nell'atmosfera derivante dal decadimento dei neutroni | » 364 |
| F. H. HIBBERD - Theoretical Resonance Curves in the Gyro-Interaction of Electromagnetic Waves in the Ionosphere | » 380 |
| P. G. BORDONI e M. NUOVO - Misure di velocità delle onde elastiche nei solidi a temperatura elevata | » 386 |
| F. CENNAMO - Diffrazione dei raggi X nei liquidi | » 395 |
| F. DEMICHELI and R. MALVANO - Cascades in the Gamma-Ray Spectrum of $^{214}_{84}\text{Po}$ | » 405 |
| M. SCHÖNBERG - Application of second quantization methods to the classical statistical mechanics - (II). | » 419 |
| G. MORPURGO - Sull'energia di legame dell' He^6 e del Li^6 | » 473 |
| W. F. FRY - Electrons Associated with Negative μ -Mesons | » 490 |

Lettere alla Redazione:

| | |
|---|-------|
| H. MESSEL and R. B. POTTS - On a Recent Interpretation of Star Data | » 496 |
| A. LOINGER - Un esempio elettrodinamico di teorema di ortogonalità alla Van Hove | » 498 |
| G. WATAGHIN - On the Non Local Interaction and on the Statistical Interpretation of the Cut-off Operators | » 500 |

| | |
|--|-------|
| <i>Libri ricevuti e Recensioni</i> | » 504 |
|--|-------|

N. 5, 1° MAGGIO 1953

| | |
|--|----------|
| M. DELLA CORTE, M. RAMAT and L. RONCHI jr. - The Grain Density and the Process of Track Formation in Nuclear Emulsions | pag. 509 |
| M. CINI - A Covariant Formulation of the Non-Adiabatic Method for the Relativistic Two-Body Problem - (I) | » 526 |
| M. CECCARELLI and G. T. ZORN - On the Angular Correlation of the Products of Nuclear Disintegration | » 540 |

| | |
|--|----------|
| S. FRANCHETTI - Cloud Chamber Study of Cosmic Ray Electronic Showers under Dense Materials - (I) | pag. 551 |
| S. FUBINI : Non Adiabatic Treatment of Nucleon-Pion Scattering | » 564 |
| A. JABŁOŃSKI - Fluorescent Emission of Resonance Lines at Higher Pressures | » 573 |
| E. R. CAIANIELLO - Non-Linearities in the Strong-Focusing Accelerator | » 581 |
| E. R. CAIANIELLO and A. TURRIN - Stability and Periodicity in the Strong-Focusing Accelerator | » 594 |
| M. SANDS and B. TOUSCHER - Alignment Errors in the Strong-Focusing Synchrotron | » 604 |
| M. CINI - A Covariant Formulation of the Non-Adiabatic Method for the Relativistic Two Body Problem - (II) | » 614 |
| J. A. VAN ALLEN - The Cosmic Ray Intensity Above the Atmosphere Near the Geomagnetic Pole | » 630 |
| W. PAULI - On the Hamiltonian Structure of Non-Local Field Theories | » 648 |
| M. CHRÉTIEN and R. E. PEIERLS - Properties of Form Factors in Non-Local Theories | » 668 |

Lettere alla Redazione:

| | |
|---|-------|
| G. E. TAUBER and TA-YOU WU - The J Values of States in Configurations $(j)^n$ | » 677 |
| M. CECCARELLI, N. DALLAPORTA, M. MERLIN, G. QUARENI e G. T. ZORN - Un mesone τ uscente da stella | » 681 |
| E. CLEMENTEL - Sulla penetrazione degli elettroni | » 683 |
| E. GATTI and A. PERSANO - Current Fluctuations in Corona counters | » 686 |
| M. PANETTI and L. SCARSI - Analysis of a τ -Meson Decay | » 687 |

| | |
|--|-------|
| <i>Libri ricevuti e Recensioni</i> | » 691 |
|--|-------|

N. 6, 1° GIUGNO 1953

| | |
|---|----------|
| M. SCHÖNBERG - A General Theory of the Second Quantization Methods | pag. 697 |
| R. ASCOLI - Interazioni non localizzabili. Confronto fra varie formulazioni | » 745 |
| H. MESSEL and R. B. POTTS - Longitudinal Development of Extensive Air Showers | » 754 |
| M. CRESTI, A. LORIA e G. ZAGO - Sulla distribuzione zenitale delle particelle degli sciami estesi | » 779 |
| J. RZEWUSKI - Differential Conservation Laws in Non-local Field Theories | » 784 |
| E. AMALDI, L. MEZZETTI and G. STOPPINI - On the Longitudinal Development of Air Showers According to Fermi's Theory of Meson Production | » 803 |
| S. PETRALIA - Interferometria ultrasuonora nei gas (IV). Assorbimento di ultrasuoni nell'ammoniac | » 817 |
| M. ARTOM, C. M. GARELLI e C. GENTILE - Applicazione di filtri interferenziali alla fotometria e alla colorimetria | » 827 |

Note Tecniche:

| | |
|---|-------|
| P. L. BONFERRONI e M. CONVERSI - Uno stimolatore elettronico comandato dai potenziali biologici | » 835 |
| M. CRESTI, A. LORIA e G. ZAGO - Camera di Wilson in campo magnetico | » 843 |

Lettere alla Redazione:

| | |
|--|----------|
| S. FUBINI - A Covariant Non-Adiabatic Equation for Nucleon-Pion Scattering | pag. 851 |
| M. LADU - Eventi anelastici da protoni di alta energia in emulsioni nucleari | » 855 |
| S. DEUTSCH et E. C. DODD - Radioactivité α Spécifique des Plaques Ilford pour Recherches Nucléaires | » 858 |
| <i>Libri ricevuti e Recensioni</i> | » 862 |

N. 7, 1° LUGLIO 1953

| | |
|---|----------|
| R. FIESCHI and F. G. FUMI - High-order Matter Tensors in Symmetrical Systems | pag. 865 |
| A. CARRELLI and F. PORRECA - Ultrasonic Grating Remaining after the Stopping of the Ultrasonic Waves - (III) | » 883 |
| C. CASTAGNOLI, A. GIGLI and S. SCIUTI - On the Associated Penetrating Particles Underground | » 893 |
| M. CONVERSI, G. MARTELLI e P. ROTHWELL - Sul rapporto tra i numeri di neutroni e di protoni e su alcune proprietà della componente nucleonica a 3500 m sul l.d.m. | » 898 |
| M. CUTOLO - Determinazione sperimentale dell'intensità totale del campo magnetico terrestre nella regione inferiore dell'alta atmosfera (strato E) | » 915 |
| C. C. DILWORTH and S. T. GOLDSACK - The Spectra and Sign Distribution of Particles from Cosmic Ray Stars at 2860 metres Altitude | » 926 |
| E. AMALDI, G. BARONI, C. CASTAGNOLI, G. CORTINI and A. MANFREDINI - Contribution to the τ -Meson Investigation | » 937 |
| A. BRACCI, U. FACCHINI, E. GATTI, E. GERMAGNOLI, A. MALVICINI and G. PERONA - Neutron Capture γ Rays from Deuterium | » 949 |
| M. DELLA CORTE, M. RAMAT and L. RONCHI jr. - The Grain Density and the Process of Track Formation in Nuclear Emulsions (II) | » 958 |

Note Tecniche:

| | |
|---|-------|
| G. GUERCI, G. TAGLIAFERRI e L. TERRA - Apparecchiatura per lo studio di fenomeni elettrodici nelle celle elettrolitiche | » 971 |
|---|-------|

Lettere alla Redazione:

| | |
|---|-------|
| E. GATTI and F. PIVA - A New Single Channel Elementary Amplitude Discriminator | » 984 |
| G. LOVERA, L. BARBANTI SILVA, C. BONACINI, C. DE PIETRI, R. PERILLI FEDELI e A. ROVERI - Su una coppia di stelle vicine correlate | » 986 |
| E. CLEMENTEL e A. COEN - Sullo scattering di particelle cariche da parte dei nuclei | » 988 |
| G. BERTOLINO, A. DEBENEDETTI, G. LOVERA e M. VIGONE - Sui « jets » di mesoni nelle emulsioni nucleari | » 991 |
| G. BOATO, G. CARERI, A. CIMINO, E. MOLINARI and G. G. VOLPI - A Perturbing Factor on the Kinetics of the Homogeneous Hydrogen Deuterium Exchange Reaction | » 993 |
| <i>Libri Ricevuti e Recensioni</i> | » 995 |

N. 8, 1° AGOSTO 1953

| | |
|--|----------|
| T. REGGE and M. VERDE - Scattering Problems with Spin-Orbit Couplings | pag. 997 |
| F. CENNAMO e E. TARTAGLIONE - Diffrazione dei raggi X in soluzioni acquose di formaldeide | » 1012 |
| G. SALVINI - Interaction Mean Free Path and Charge Exchange of the π -Mesons | » 1018 |
| L. ARGIERO - Determinazione delle curve di sensibilità ai raggi γ di emulsioni fotografiche | » 1035 |
| M. CINI and A. GAMBA - Has the isotopic spin any sense for light particles? | » 1040 |
| M. GRILLI e B. VITALE - Tracce di rinculo nelle stelle di disintegrazione nucleare prodotte alla radiazione cosmica | » 1047 |
| B. FERRETTI - Sulla diagonalizzazione della hamiltoniana nella teoria dei campi (II) | » 1079 |
| C. MILONE - Sugli elettroni e fotoni negli sciami estesi di raggi cosmici . . | » 1126 |
| I. F. QUERCIA and B. RISPOLI - Altitude and Geomagnetic Effects of Positive and Negative Penetrating Particles of Cosmic Radiation | » 1142 |
| P. BUDINI e C. VILLI - Teoria non locale dell'interazione tra particelle di Fermi | » 1172 |
| M. GALLI - Produzione di neutroni di bassa energia da parte della radiazione cosmica | » 1187 |

Lettere alla Redazione:

| | |
|---|--------|
| S. PARTHASARATHY and P. P. MAHENDROO - Absorption Coefficient of Ultrasonics in Some Liquid Determined by the New Thermal Technique | » 1196 |
| W. MÄCKE - Renormalized Two Particle Potential from Field Theory | » 1198 |
| A. LOVATI, A. MURA, C. SUCCI and G. TAGLIAFERRI - Further Results on the Interaction of Cosmic Rays Underground | » 1201 |
| A. BATTAGLIA, A. GOZZINI e E. POLACCO - Birifrangenza magnetica di sostanze paramagnetiche nelle condizioni di risonanza | » 1205 |
| M. CECCARELLI e M. MERLIN - Disintegrazione in movimento di una particella pesante | » 1207 |

| | |
|--|--------|
| <i>Libri Ricevuti e Recensioni</i> | » 1210 |
|--|--------|

N. 9, 1° SETTEMBRE 1953

| | |
|---|-----------|
| A. CARRELLI - Sui problemi della separabilità delle variabili | pag. 1213 |
| P. STÄHELIN und P. PREISWERK - Die Lage der ersten Anregungsstufe in Kernen mit gerader Protonen- und gerader Neutronenzahl | » 1219 |
| C. C. DILWORTH, S. J. GOLDSACK, T. F. HOANG and L. SCARSI - An Analysis of « Jets » initiated by High Energy Cosmic Rays | » 1261 |
| M. MANDÒ e P. G. SONA - Sull'applicabilità del concetto di percorso per l'assorbimento dei muoni sotto terra | » 1275 |
| P. BUDINI e G. POIANI - Sulla anelasticità degli urti nucleone-nucleone a grande energia | » 1288 |
| P. BUDINI - Processi del second'ordine dell'interazione alla Fermi | » 1299 |

| | |
|---|-----------|
| R. GATTO - Sul contributo delle forze tensoriali ai momenti di quadrupolo dei nuclei pesanti | pag. 1311 |
| P. BROVETTO, G. CINI e S. FERRONI - Risonanza paramagnetica del solfato doppio di manganese e ammonio | » 1325 |

Lettere alla Redazione:

| | |
|--|--------|
| F. BELLA and C. FRANZINETTI - On the Theory of the Spark Counter | » 1335 |
| F. BELLA, C. FRANZINETTI and D. W. LEE - On Spark Counters | » 1338 |
| E. MORASCHINELLI - Autoradiografia dell'aerosol atmosferico | » 1341 |
| A. GAMBA - The Number of Independent Components of Tensors in Symmetrical Systems | » 1343 |
| A. ASCOLI BALZANELLI e R. ASCOLI - Effetto Čerenkov in sostanze aeriformi | » 1345 |
| F. CAP - Nichtlineare pseudoskalare Mesonentheorie | » 1347 |
| D. C. PEASLEE - The Ground State of Cl^{34} | » 1349 |
| E. AMALDI, C. CASTAGNOLI, G. CORTINI and A. MANFREDINI - Preliminary Research on V_1^0 Events in Emulsions | » 1351 |
| E. BERETTA, I. FILOSOFO and B. SOMMACAL - On the positive excess of Mesons of High Energy | » 1354 |

| | |
|-----------------------------------|--------|
| <i>Errata - Corrige</i> | » 1357 |
|-----------------------------------|--------|

N. 10, 1° OTTOBRE 1953

| | |
|--|-----------|
| F. DEMICHELI e R. MALVANO - Correlazione angolare nelle cascate $\gamma\text{-}\gamma$ del $^{214}\text{Po}_{84}$ | pag. 1359 |
| E. FABRI - Teoria semiclassica della diffusione dei mesoni su nucleoni | » 1367 |
| A. KIND e G. PATERGNANI - Modello a particelle indipendenti ed eccitazione del nucleo pesante | » 1375 |
| E. GERMAGNOLI, A. MALVICINI and L. ZAPPA - Gamma Rays Emitted from ^{60}Co , ^{55}Mn , ^{187}W , ^{128}I , ^{104}Rh | » 1388 |
| A. CARRELLI and F. PORRECA - Ultrasonic Grating Remaining After the Stopping of the Ultrasonic Waves (IV) | » 1406 |
| T. EGUCHI and M. OHTA - Capture of μ -Mesons by Atomic Nuclei | » 1415 |
| G. BERTOLINI, A. BISI e L. ZAPPA - Spettrometro beta e gamma a contatore proporzionale | » 1424 |
| J. W. BROXON - Chree Analysis of Pressure-Temperature-Corrected Cosmic-Ray Burst Frequencies | » 1434 |
| R. CESTER e E. CLEMENTEL - Sul calcolo delle tracce elettrofotoniche | » 1441 |

Note Tecniche:

| | |
|---|--------|
| J. E. C. PLAINEVAUX - Guidage par suspension sur lames élastiques | » 1451 |
| F. BELLA and C. FRANZINETTI - Spark counters | » 1461 |

Lettere alla Redazione:

| | |
|--|--------|
| S. GOLDSACK, M. SCHÖNBERG and G. VANDERHAEGHE - Possible Example of a New Mode of Disintegration of the Neutral μ -Meson | » 1480 |
|--|--------|

| | |
|---|-----------|
| M. BALDO e B. SECHI - Un mesone K uscente da stella | pag. 1482 |
| H. C. CORBEN - Long Range Nuclear Forces | » 1485 |
| P. BUDINI - Processi del quart'ordine dell'interazione alla Fermi | » 1486 |
| P. BUDINI e L. TAFFARA - Sulla ionizzazione e sulla radiazione di Čerenkov | » 1489 |
| A. W. WOLFENDALE - On the Possible Existence of Associated Knock-on Electrons | » 1493 |
| S. GALLONE - Sul fattore di utilizzazione termica ed il tratto di diffusione termico in una pila eterogenea | » 1495 |

N. 11. 1° NOVEMBRE 1953

| | |
|---|-----------|
| M. SCHÖNBERG - A Statistical Generalization of the Quantum Mechanics (I) | pag. 1499 |
| C. CASTAGNOLI, G. CORTINI, C. FRANZINETTI, A. MANFREDINI and D. MORENO - An Investigation on Jets | » 1539 |
| R. GATTO - On the Scattering of μ -Mesons by Nuclei | » 1559 |
| P. GULMANELLI: On a Theorem in Non-Local Field Theories | » 1582 |
| M. DEBEAUVAIS-WACK - Action de la basse température sur les émulsions nucléaires | » 1590 |

Lettere alla Redazione:

| | |
|--|--------|
| G. STEPHENSON - Dirac's Electrodynamics and Einstein's Unified Field Theory | » 1595 |
| M. SCHÖNBERG - Generalization of the Classical Field Formalism by Means of Functionals | » 1597 |
| G. WATAGHIN - On a Non-Local Field Theory | » 1602 |

| | |
|--|--------|
| <i>Libri Ricevuti e Recensioni</i> | » 1605 |
|--|--------|

| | |
|---------------------------------|--------|
| <i>Errata-Corrige</i> | » 1605 |
|---------------------------------|--------|

N. 12. 1° DICEMBRE 1953

| | |
|--|-----------|
| R. RICAMO - D-D, Neutron Scattering and Polarisation Effect in C^{12} | pag. 1607 |
| G. ALVIAL C. - Studio dell'azione di vari metodi di sviluppo nella formazione del fondo delle emulsioni nucleari | » 1616 |
| F. G. HOUTERMANS - Determination of the Age of the Earth from the Isotopic Composition of Meteoritic Lead | » 1623 |
| E. R. CAIANIELLO - Quantum Field Theory. I: Explicit Solution of Dyson's Equation in Electrodynamics without Use of Feynman Graphs | » 1634 |
| G. BARONI, A. BORSELLINO, L. SCARSI and G. VANDERHAEGHE - An Analysis of the Electron Pairs Produced in Nuclear Emulsions by Cosmic Rays Photons | » 1653 |
| D. BRINI and P. VERONESI - The Decay of the Space Charges in Intermittent Discharges in Neon and Argon | » 1662 |
| E. CORINALDESI - On the Scattering Theory of Relativistic Equations | » 1673 |
| G. MORPURGO and B. F. TOUSCHEK - Remarks on the Validity of the Tamm-Dancoff Method | » 1681 |

| | |
|--|-----------|
| M. CINI and S. FUBINI - Adiabatic Nuclear Potential for Large Values of the Coupling Constant | pag. 1695 |
| V. DE SABBATA, E. MANARESI e G. PUPPI - Eccitazione dei nuclei per assorbimento dei mesoni π^- . (II). Risultati e conclusioni | " 1704 |
| A. BONETTI, R. LEVI SETTI, M. PANETTI and G. TOMASINI - On the Existence of Unstable Charged Particles of Hyperprotonic Mass | " 1729 |
| J. RAISKI - Mass Quantization and Isotopic Spin in Non-Local Field Theory | " 1736 |

Lettere alla Redazione:

| | |
|---|--------|
| C. MILONE - Sciami di almeno due elettroni prodotti in piombo da raggi cosmici | " 1744 |
| P. CALDIROLA - Sull'equazione del moto dell'elettrone nell'elettrodinamica classica | " 1747 |
| A. MINGUZZI, G. PUPPI and A. RANZI : Interaction of π^+ mesons in photographic plates - (I) | " 1753 |

| | |
|--|--------|
| <i>Libri ricevuti e Recensioni</i> | " 1756 |
|--|--------|

INDICE PER AUTORI

Le sigle L., N.T., I., N.d.L., P.D., si riferiscono rispettivamente alle *Lettere alla Redazione*, alle *Note Tecniche*, alle *Informazioni*, alle *Note di Laboratorio*, alle *Proposte e Discussioni*.

| | |
|---|-----------|
| AGENO M., G. CORTELLESA e R. QUERZOLI - Sezione d'urto totale di alcuni elementi per neutroni di 14 MeV | pag. 281 |
| ALBERTONI S. e M. CUGIANI - Sul problema del cambiamento di variabili nella teoria delle distribuzioni (II) | 157, 1605 |
| ALVIAL C. G. - Studio dell'azione di vari metodi di sviluppo nella formazione del fondo delle emulsioni nucleari | " 1616 |
| AMALDI E., G. BARONI, C. CASTAGNOLI, G. CORTINI and A. MANFREDINI - Contribution to the τ -Meson Investigation | " 937 |
| AMALDI E., C. CASTAGNOLI, G. CORTINI and A. MANFREDINI - Preliminary Research on V_1^0 Events in Emulsions (L.) | " 1351 |
| AMALDI E., L. MEZZETTI and G. STOPPINI - On the Longitudinal Development of Air Showers According to Fermi's Theory of Meson Production | " 803 |
| ARGIERO L. - Determinazione delle curve di sensibilità ai raggi γ di emulsioni fotografiche | " 1035 |
| ARTOM M., C. M. GARELLI e C. GENTILE - Applicazione di filtri interferenziali alla fotometria e alla colorimetria | " 827 |
| ASCOLI BALZANELLI A. e R. ASCOLI - Effetto Čerenkov in sostanze aeriiformi (L.) | " 1345 |
| ASCOLI R. - Interazioni non localizzabili. Confronto fra varie formulazioni | " 745 |
| ASCOLI R. (vedi ASCOLI BALZANELLI A.) | " 1345 |
| BALDO M. e B. SECHI - Un mesone K uscente da stella (L.) | " 1482 |
| BARBANTI SILVA L. (vedi LOVERA G.) | " 986 |
| BARONI G. (vedi AMALDI E.) | " 937 |

| | |
|--|-----------|
| BARONI G., A. BORSELLINO, L. SCARSI and G. VANDERHAEGHE - Analysis of the Electron Pairs Produced in Nuclear Emulsions by Cosmic Rays Photons | pag. 1653 |
| BATTAGLIA A., A. GOZZINI e E. POLACCO - Birifrangenza magnetica di sostanze paramagnetiche nelle condizioni di risonanza (L.) | » 1205 |
| BELLA F. and C. FRANZINETTI - On the Theory of the Spark Counter (L.) | » 1335 |
| BELLA F. and C. FRANZINETTI - Spark Counters (N. T.) | » 1461 |
| BELLA F., C. FRANZINETTI and D. W. LEE - On Spark Counters (L.) | » 1338 |
| BELLIBONI G. e B. VITALE - Distribuzioni angolari dei rami neri e grigi in stelle di media e alta energia | » 72 |
| BERETTA E., I. FILOSOFO and B. SOMMACAL - On the Positive Excess of Mesons of High Energy (L.) | » 1354 |
| BERTOLINI G., A. BISI e L. ZAPPA - Spettrometro beta e gamma a contatore proporzionale | » 1424 |
| BERTOLINO G., A. DEBENEDETTI, G. LOVERA e M. VIGONE - Sui « jets » di mesoni nelle emulsioni nucleari (L.) | » 991 |
| BISI A. (vedi BERTOLINI G.) | » 1424 |
| BOATO G., G. CARERI, A. CIMINO, E. MOLINARI and G. G. VOLPI - A Perturbating Factor on the Kinetics of the Homogeneous Hydrogen Deuterium Exchange Reaction (L.) | » 993 |
| BONACINI C. (vedi LOVERA G.) | » 986 |
| BONETTI A., N. DALLAPORTA, M. MERLIN e G. DASCOLA - Produzione di mesoni in materiali condensati diversi | » 215 |
| BONETTI A., R. LEVI SETTI, M. PANETTI and G. TOMASINI - Observation of the Decay at Rest of a Heavy Particle (L.) | » 345 |
| BONETTI A., R. LEVI SETTI, M. PANETTI and G. TOMASINI - On the Existence of Unstable Charged Particles of Hyperprotonic Mass | » 1736 |
| BONFERRONI P. L. e M. CONVERSI - Uno stimolatore elettronico comandato dai potenziali biologici (N. T.) | » 835 |
| BORDONI P. G. - Dipendenza delle autofrequenze di un solido dalla temperatura e dal volume, secondo la meccanica statistica | » 268 |
| BORDONI P. G. e M. NUOVO - Misure di velocità delle onde elastiche nei solidi a temperatura elevata | » 386 |
| BORSELLINO A. (vedi BARONI G.) | » 1653 |
| BRACCI A., U. FACCHINI, E. GATTI, E. GERMAGNOLI, A. MALVICINI and G. PERONA - Neutron Capture γ Rays from Deuterium | » 949 |
| BRACCI A. and E. L. ZIMMER - Drift Velocity of Electrons in BF_3 (L.) | » 103 |
| BRINI D. and P. VERONESI - The Decay of the Space Charges in Intermittent Discharges in Neon and Argon | » 1662 |
| BROVETTO P., G. CINI e S. FERRONI - Risonanza paramagnetica del solfato doppio di manganese e ammonio | » 1325 |
| BRONXON J. W. - Chree Analysis of Pressure-Temperature-Corrected Cosmic-Ray Burst Frequencies | » 1434 |
| BUDINI P. - On the Energy Lost by a Relativistic Ionizing Particle in a Material Medium and on the Čerenkov Radiation | » 236 |
| BUDINI P. - Processi del second'ordine dell'interazione alla Fermi | » 1299 |
| BUDINI P. - Processi del quart'ordine nell'interazione alla Fermi (L.) | » 1486 |
| BUDINI P. e G. POIANI - Sulla anelasticità degli urti nucleone-nucleone a grande energia | » 1288 |

| | |
|---|-----------|
| BUDINI P. e L. TAFFARA - Sulla ionizzazione e sulla radiazione di Čerenkov (L.) | pag. 1489 |
| BUDINI P. e C. VILLI - Teoria non locale dell'interazione tra particelle di Fermi | " 1172 |
| CADORIN D. - Sulla componente elettronica della radiazione cosmica nell'atmosfera derivante dal decadimento dei neutretti | " 364 |
| CAIANIELLO E. R. - On the universal Fermi-Type interaction (III) | " 43 |
| CAIANIELLO E. R. - Non-Linearities in the Strong-Focusing Accelerator | " 581 |
| CAIANIELLO E. R. - Quantum Field Theory. I: Explicit Solution of Dyson's Equation in Electrodynamics without Use of Feynmann Graphs | " 1634 |
| CAIANIELLO E. R. and A. TURRIN - Stability and Periodicity in the Strong-Focusing Accelerator | " 594 |
| CALDIROLA P. - Sull'equazione del moto dell'elettrone nell'elettrodinamica classica (L.) | " 1747 |
| CAP F. - Nichtlineare pseudoskalare Mesonentheorie (L.) | " 1347 |
| CARERI G. (vedi BOATO G.) | " 993 |
| CARRELLI A. - Sui problemi della separazione delle variabili | " 1213 |
| CARRELLI A. and F. PORRECA - Ultrasonic grating remaining after stopping the supersonic waves - (II) (L.) | " 98 |
| CARRELLI A. and F. PORRECA - Ultrasonic Grating Remaining after the Stopping of the Ultrasonic Waves (III) | " 883 |
| CARRELLI A. and F. PORRECA - Ultrasonic Grating Remaining after the Stopping of the Ultrasonic Waves (IV) | " 1406 |
| CASTAGNOLI C. (vedi AMALDI E.), | " 937 |
| CASTAGNOLI C. (vedi AMALDI E.), | " 1351 |
| CASTAGNOLI C., G. CORTINI, C. FRANZINETTI, A. MANFREDINI and D. MORENO - An Investigation on Jets | " 1539 |
| CASTAGNOLI C., A. GIGLI and S. SCIUTI - On the Associated Penetrating Particles Underground | " 893 |
| CECCARELLI M., N. DALLAPORTA, M. MERLIN, G. QUARENI e G. T. ZORN - Un mesone τ uscente da stella | " 681 |
| CECCARELLI M. e M. MERLIN - Disintegrazione in movimento di una particella pesante (L.) | " 1207 |
| CECCARELLI M. and G. T. ZORN - On the Angular Correlation of the Products of Nuclear Disintegration | " 540 |
| CENNAMO F. - Diffrazione dei raggi X nei liquidi | " 395 |
| CENNAMO F. e E. TARTAGLIONE - Diffrazione dei raggi X in soluzioni acquose di formaldeide | " 1012 |
| CESTER R. e E. CLEMENTEL - Sul calcolo delle tracce elettrofotoniche | " 1441 |
| CHARI S. S. (vedi PARTHASARATHY S.) | " 264 |
| CHHAPGAR A. F. (vedi PARTHASARATHY S.) | " 260 |
| CHIAROTTI G. and L. GIULOTTO - Nuclear signals dependence on the radio-frequency field and paramagnetic catalyst | " 54 |
| CHRÉTIEN M. and R. E. PEIERLS - Properties of Form Factors in Non-Local Theories | " 668 |
| CIMINO A. (vedi BOATO G.) | " 993 |
| CINI G. (vedi BROVETTO P.) | " 1325 |
| CINI M. - A Covariant Formulation of the Non-Adiabatic Method for the Relativistic Two Body Problem (I) | " 526 |

| | |
|---|-----------|
| CINI M. - A Covariant Formulation of the Non-Adiabatic Method for the Relativistic Two Body Problem (II) | pag. 614 |
| CINI M. and S. FUBINI - Adiabatic Nuclear Potential for Large Values of the Coupling Constant | " 1695 |
| CINI M. and A. GAMBA - Has the isotopic spin any sense for light particles? | " 1040 |
| CLEMENTEL E. - Sulla penetrazione degli elettroni (L.) | " 683 |
| CLEMENTEL E. (vedi CESTER R.) | " 1441 |
| CLEMENTEL E. e A. COEN - Sullo scattering di particelle cariche da parte dei nuclei (L.) | " 988 |
| CLEMENTEL E. e G. PUPPI - Interazione con i nuclei e produzione di mesoni π | " 197 |
| COEN A. (vedi CLEMENTEL E.) | " 988 |
| CONVERSI M. (vedi BONFERRONI P. L.) | " 835 |
| CONVERSI M., G. MARTELLI e P. ROTHWELL - Sul rapporto tra i numeri di neutroni e di protoni e su alcune proprietà della componente nucleonica a 3500 m sul l.d.m. | " 898 |
| CORBEN H. C. - Long-Range Nuclear Forces (L.) | " 1485 |
| CORINALDESI E. - On the Scattering Theory of Relativistic Equations | " 1673 |
| CORTELLESA G. (vedi AGENO M.) | " 281 |
| CORTINI G. (vedi AMALDI E.) | " 937 |
| CORTINI G. (vedi AMALDI E.) | " 1351 |
| CORTINI G. (vedi CASTAGNOLI C.) | " 1539 |
| CRESTI M., A. LORIA e G. ZAGO - Sulla distribuzione zenitale delle particelle degli sciami estesi | " 779 |
| CRESTI M., A. LORIA e G. ZAGO - Camera di Wilson in campo magnetico (N. T.) | " 843 |
| CUGIANI M. (vedi ALBERTONI S.) | 157, 1605 |
| CUTOLO M. - Determinazione sperimentale dell'intensità totale del campo magnetico terrestre nella regione inferiore dell'alta atmosfera (strato E) | " 915 |
| DALLAPORTA N. (vedi BONETTI A.) | " 215 |
| DALLAPORTA N. (vedi CECCARELLI M.) | " 681 |
| DASCOLA G. (vedi BONETTI A.) | " 215 |
| DEBEAUVAIS-WACK M. - Action de la basse température sur les émulsions nucléaires | " 1590 |
| DEBENEDETTI A. (vedi BERTOLINO G.) | " 991 |
| DELLA CORTE M., M. RAMAT and L. RONCHI jr. - The Grain Density and the Process of Track Formation in Nuclear Emulsions (I) | " 509 |
| DELLA CORTE M., M. RAMAT and L. RONCHI jr. - The Grain Density and the Process of Track Formation in Nuclear Emulsions (II) | " 958 |
| DEMICHELI F. e R. MALVANO - Cascades in the Gamma-Ray Spectrum of $^{214}_{84}\text{Po}$ | " 405 |
| DEMICHELI F. e R. MALVANO - Correlazione angolare nelle cascate γ - γ del $^{214}_{84}\text{Po}$ | " 1359 |
| DE PIETRI C. (vedi LOVERA G.) | " 986 |
| DE SABBATA V., E. MANARESI e G. PUPPI - Eccitazione dei nuclei per assorbimento dei mesoni μ^- . (II). Risultati e conclusioni | " 1704 |
| DEUTSCH S. et E. C. DODD - Radioactivité α Spécifique des Plaques Ilford pour Recherches Nucléaires (L.) | " 858 |

| | |
|--|----------|
| DILWORTH C. C. and S. J. GOLDSACK - The Spectra and Sign Distribution of Particles from Cosmic Ray Stars at 2860 metres Altitude | pag. 926 |
| DILWORTH C. C., S. J. GOLDSACK, T. F. HOANG and L. SCARSI - An Analysis of « Jets » initiated by High Energy Cosmic Rays | " 1261 |
| DODD E. C. (vedi DEUTSCH S.) | " 858 |
| EGUCHI T. and M. OHTA - Capture of μ -Mesons by Atomic Nuclei | " 1415 |
| FABRI E. - Teoria semiclassica della diffusione dei mesoni su nucleoni . | " 1367 |
| FACCHINI U. (vedi BRACCI A.) | " 949 |
| FERRARI F. and C. VILLI - On the Excitation Energy of a Heavy Nucleus Described by a real Fermi Gas (L.) | " 94 |
| FERRETTI B. - Sulla diagonalizzazione della hamiltoniana nella teoria dei campi (II) | " 1079 |
| FERRONI S. (vedi BROVETTO P.) | " 1325 |
| FIESCHI R. and F. G. FUMI - High-order Matter Tensors in Symmetrical Systems | " 865 |
| FILOSOFO I. (vedi BERETTA E.) | " 1354 |
| FRANCHETTI S. - Cloud Chamber Study of Cosmic Ray Electronic Showers under Dense Materials (I) | " 526 |
| FRANZINETTI C. (vedi BELLA F.) | " 1335 |
| FRANZINETTI C. (vedi BELLA F.) | " 1338 |
| FRANZINETTI C. (vedi BELLA F.) | " 1461 |
| FRANZINETTI C. (vedi CASTAGNOLI C.) | " 1539 |
| FRY W. F. (vedi MORINAGA H.) | " 308 |
| FRY W. F. - Electrons Associated with Negative μ -Mesons | " 490 |
| FUBINI S. - Non-Adiabatic Treatment of Nucleon Pion Scattering | " 546 |
| FUBINI S. - A Covariant Non-Adiabatic Equation for Nucleon-Pion Scattering (L.) | " 851 |
| FUBINI S. (vedi CINI M.) | " 1695 |
| FUMI F. G. (vedi FIESCHI R.) | " 865 |
| GALLI M. - Produzione di neutroni di bassa energia da parte della radiazione cosmica | " 1187 |
| GALLONE S. - Sul fattore di utilizzazione termica ed il tratto di diffusione termico in una pila eterogenea (L.) | " 1495 |
| GALLONE S. and C. SALVETTI - Liquid Drop Behaviour of an Independent Particle Nuclear Model | " 145 |
| GAMBA A. (vedi CINI M.) | " 1040 |
| GAMBA A. - The Number of Independent Components of Tensors in Symmetrical Systems (L.) | " 1343 |
| GAMBA A. and G. WATAGHIN - A Selection Rule for the Reaction ${}^6\text{Li}(\gamma){}^4\text{He}$ (L.) | " 174 |
| GARELLI C. M. (vedi ARTOM M.) | " 827 |
| GATTI E. (vedi BRACCI A.) | " 949 |
| GATTI E., G. PERONA e A. PERSANO - Generatore impulsabile di neutroni (N. T.) | " 80 |
| GATTI E. and A. PERSANO - Current fluctuations in Corona Counters (L.) | " 686 |
| GATTI E. and F. PIVA - A New Single Channel Elementary Amplitude Discriminator (L.) | " 984 |
| GATTO R. - Sul contributo delle forze tensoriali ai momenti di quadrupolo dei nuclei pesanti | " 1311 |
| GATTO R. - On the scattering of μ -Mesons by Nuclei | " 1559 |

| | |
|---|----------|
| GENTILE C. (vedi ARTOM M.) | pag. 827 |
| GERMAGNOLI E. (vedi BRACCI A.) | » 949 |
| GERMAGNOLI E., A. MALVICINI and L. ZAPPA - Gamma-Rays Emited from ^{60}Co , ^{56}Mn , ^{187}W , ^{128}I , ^{104}Rh | » 1388 |
| GIGLI A. (vedi CASTAGNOLI C.) | » 893 |
| GIULOTTO L. (vedi CHIAROTTI G.) | » 54 |
| GOLDSACK S. J. (vedi DILWORTH C. C.) | » 926 |
| GOLDSACK S. J. (vedi DILWORTH C. C.) | » 1261 |
| GOLDSACK S. J., M. SCHÖNBERG and G. VANDERHAEGHE - Possible Example of a New Mode of Disintegration of the Neutral μ -Meson (L.) | » 1480 |
| GOZZINI A. (vedi BATTAGLIA A.) | » 1205 |
| GRILLI B. e B. VITALE - Tracce di rinculo nelle stelle di disintegrazione nucleare prodotte dalla radiazione cosmica | » 1047 |
| GROSSETTI E. Sul modo di vibrazione della superficie di una lamina di quarzo piezoelettrico | » 151 |
| GUERCI G., G. TAGLIAFERRI e L. TERRA - Apparecchiatura per lo studio dei fenomeni elettrodi in celle elettrolitiche (N. T.) | » 971 |
| GULMANELLI P. - On a Theorem in Non-Local Field Theories | » 1582 |
| HARKKRISHAN SINGH (vedi PARTHASARATHY S.) | » 260 |
| HIBBERD F. H. - Theoretical Resonance Curves in the Gyro-Interaction of Electromagnetic Waves in the Ionosphere | » 380 |
| HOANG T. F. (vedi DILWORTH C. C.) | » 1261 |
| HOUTERMANS F. G. - Determination of the Age of the Earth from the Isotopic Composition of Meteoritic Lead | » 1623 |
| IBRAHIM A. A. K. and A. M. KABIEL - On the Oscillating Cylinder Viscosimeter (L.) | » 87 |
| INGRAHAM R. L. - Spinor Relativity | » 27 |
| JABLONSKI A. - Fluorescent Emission of Resonance Lines at Higher Pressures | » 573 |
| KABIEL A. M. (vedi IBRAHIM A. A. K.) | » 87 |
| KILMISTER C. W. (vedi STEPHENSON G.) | » 230 |
| KIND A. - A proposito della dinamica nucleare (L.) | » 176 |
| KIND A. e G. PATERGNANI - Modello a particelle indipendenti ed eccitazione del nucleo pesante | » 1375 |
| LADU M. - Stelle da protoni di alta energia in emulsioni nucleari (L.) | » 108 |
| LADU M. - Eventi anelastici da protoni di alta energia in emulsioni nucleari (L.) | » 855 |
| LEE D. W. (vedi BELLA F.) | » 1338 |
| LEVI SETTI R. (vedi BONETTI A.) | » 345 |
| LEVI SETTI R. (vedi BONETTI A.) | » 1736 |
| LEVI SETTI R. and G. TOMASINI - Slow Heavy Mesons from Cosmic Ray Stars (<i>Addendum</i>) | » 356 |
| LOINGER A. - Un semplice modello di due campi interagenti (<i>Addendum</i>) | » 356 |
| LOINGER A. - Un esempio elettrodinamico di teorema di ortogonalità alla Van Hove (L.) | » 498 |
| LORIA A. (vedi CRESTI M.) | » 779 |
| LORIA A. (vedi CRESTI M.) | » 843 |
| LOVATI A., A. MURA, C. SUCCI and G. TAGLIAFERRI - A Search for the Production of Penetrating Secondaries by μ -Mesons Underground (L.) | » 105 |
| LOVATI A., A. MURA, C. Succi and G. TAGLIAFERRI - Further results on | |

| | |
|---|-----------|
| the Interaction of Cosmic Rays Underground (L.) | pag. 1201 |
| LOVERA C. (vedi BERTOLINO G.) | » 991 |
| LOVERA G., L. BARBANTI SILVA, C. BONACINI, C. DE PIETRI, R. PERILLI | |
| FEDELI e A. ROVERI - Su una coppia di stelle vicine correlate (L.) . | » 986 |
| MACKE W. - Renormalized Two Particle Potential from Field Theory (L.) | » 1198 |
| MAHENDROO P. P. (vedi PARTHASARATHY S.) | » 1196 |
| MALVANO R. (vedi DEMICHELI F.) | » 405 |
| MALVANO R. (vedi DEMICHELI F.) | » 1359 |
| MALVICINI A. (vedi BRACCI A.) | » 949 |
| MALVICINI A. (vedi GERMAGNOLI E.) | » 1388 |
| MANARESI E. (vedi DE SABBATA V.) | » 1704 |
| MANDÒ M. e P. G. SONA - Sull'applicabilità del concetto di percorso per l'assorbimento dei muoni sotto terra | » 1275 |
| MANFREDINI A. (vedi AMALDI E.) | » 937 |
| MANFREDINI A. (vedi AMALDI E.) | » 1351 |
| MANFREDINI A. (vedi CASTAGNOLI C.) | » 1539 |
| MARTELLI G. (vedi CONVERSI M.) | » 898 |
| MCCUSKER C. B. A. (vedi ROESLER F. C.) | » 127 |
| MERLIN M. (vedi BONETTI A.) | » 215 |
| MERLIN M. (vedi CECCARELLI M.) | » 681 |
| MERLIN M. (vedi CECCARELLI M.) | » 1207 |
| MESSER H. and R. B. POTTS - On a Recent Interpretation of Star Data (L.) | » 496 |
| MESSER H. and R. B. POTTS - Longitudinal Development of Extensive Air Showers | » 754 |
| MEZZETTI L. (vedi AMALDI E.) | » 803 |
| MICHEL L. - Selection Rules Imposed by Charge Conjugation | » 319 |
| MILONE C. - Un odoscopio meccanico (N. T.) | » 340 |
| MILONE C. - Sugli elettroni e fotoni negli sciami estesi dei raggi cosmici | » 1126 |
| MILONE C. - Sciami di almeno due elettroni prodotti in piombo da raggi cosmici (L.) | » 1744 |
| MINGUZZI A., G. PUPPI and A. RANZI - Interaction of π^+ Mesons in Photo- graphic Plates (L.) | » 1747 |
| MOLINARI E. (vedi BOATO G.) | » 993 |
| MORASCHINELLI E. - Autoradiografia dell'aerosol atmosferico (L.) | » 1341 |
| MORENO D. (vedi CASTAGNOLI C.) | » 1539 |
| MORINAGA H. and W. F. FRY - Nuclear Capture of Negative μ -Mesons in Photographic Emulsions | » 308 |
| MORPURGO G. - Sull'energia di legame dell' He^5 e del Li^6 | » 473 |
| MORPURGO G. and B. F. TOUSCHEK - Remarks on the Validity of the Tamm-Dankoff Method | » 1681 |
| MURA A. (vedi LOVATI A.) | » 105 |
| MURA A. (vedi LOVATI A.) | » 1201 |
| NUOVO M. (vedi BORDONI P. G.) | » 386 |
| OHTA M. (vedi EGUCHI T.) | » 1415 |
| OLIVELLI G. - Spettro Raman di bassa frequenza dell'aragonite (L.) . . . | » 343 |
| PANETTI M. (vedi BONETTI A.) | » 345 |
| PANETTI M. (vedi BONETTI A.) | » 1736 |
| PANETTI M. and L. SCARSI - Analysis of a τ -Meson Decay (L.) | » 687 |
| PARTHASARATHY S., A. F. CHAPGAR and HARKRISHAN SINGH - Dispersion of Ultrasonic Velocity in some Organic Liquids | » 260 |

| | |
|--|-----------|
| PARTHASARATHY S. and P. P. MAHENDROO - Absorption Coefficient of Ultrasonics in Some Liquid Determined by the New Thermal Technique (L.) | pag. 1196 |
| PARTHASARATHY S., D. SRINAVASAN and S. S. CHARI - Absorption of Ultrasonic Waves in Liquids ad 5 MHz from Thermal Considerations | » 264 |
| PATERGNANI G. (vedi KIND A.) | » 1375 |
| PAULI W. - On the Hamiltonian Structure of Non-Local Field Theories | » 648 |
| PEASLEE D. C. - The Ground State of Cl^{34} (L.) | » 1349 |
| PEIERLS R. E. (vedi CHRÉTIEN M.) | » 668 |
| PERILLI FEDELI R. (vedi LOVERA G.) | » 986 |
| PERONA G. (vedi GATTI E.) | » 80 |
| PERONA G. (vedi BRACCI A.) | » 949 |
| PERSANO A. (vedi GATTI E.) | » 80 |
| PERSANO A. (vedi GATTI E.) | » 686 |
| PETRALIA S. Interferometria ultrasonora nei gas (IV). Assorbimento di ultrasuoni nell'ammoniaca | » 817 |
| PIVA F. (vedi GATTI E.) | » 984 |
| PLAINEVAUX J. E. C. - Guidage par suspension sur lames élastiques (N. T.) | » 1451 |
| POIANI G. (vedi BUDINI P.) | » 1288 |
| POIANI G. e C. VILLI - Nota sullo sparpagliamento laterale degli sciami alle alte energie (L.) | » 179 |
| POLACCO E. (vedi BATTAGLIA A.) | » 1205 |
| PORRECA F. (vedi CARRELLI A.) | » 98 |
| PORRECA F. (vedi CARRELLI A.) | » 883 |
| PORRECA F. (vedi CARRELLI A.) | » 1406 |
| POTTS R. B. (vedi MESSEL H.) | » 496 |
| POTTS R. B. (vedi MESSEL H.) | » 754 |
| PREISWERK P. (vedi STÄHELIN P.) | » 1219 |
| PUPPI G. (vedi CLEMENTEL E.) | » 197 |
| PUPPI G. (vedi DE SABBATA V.) | » 1704 |
| PUPPI G. (vedi MINGUZZI A.) | » 1753 |
| QUARENI G. (vedi CECCARELLI M.) | » 681 |
| QUERCIA I. F. and B. RISPOLI - Zenithal Dependence of the Penetrating Component of Cosmic Radiation | » 357 |
| QUERCIA I. F. and B. RISPOLI - Altitude and Geomagnetic Effects of Positive and Negative Penetrating Particles of Cosmic Radiation | » 1142 |
| QUERZOLI R. (vedi AGENO M.) | » 281 |
| RAMAT M. (vedi DELLA CORTE M.) | » 509 |
| RAMAT M. (vedi DELLA CORTE M.) | » 958 |
| RANZI A. (vedi MINGUZZI A.) | » 1753 |
| RAYSKI J. - On a Regular Field Theory | » 1 |
| RAYSKI J. - Mass Quantization and Isotopic Spin in Non-Local Field Theory | » 1729 |
| REGGE T. e M. VERDE - Scattering Problems with Spin-Orbit Couplings | » 997 |
| RICAMO R. - D-D, Neutrons Scattering and Polarisation Effect in C^{12} | » 1607 |
| RISPOLI B. (vedi QUERCIA I. F.) | » 357 |
| RISPOLI B. (vedi QUERCIA I. F.) | » 1142 |
| ROESLER F. C. and C. B. A. McCUSKER - On the Growth of a Cosmic Ray Initiated Jet in a Nucleus | » 127 |
| RONCHI L. jr. (vedi DELLA CORTE M.) | » 509 |

| | |
|--|----------|
| RONCHI L. jr. (vedi DELLA CORTE M.) | pag. 958 |
| ROTHWELL P. (vedi CONVERSI M.) | " 898 |
| ROVERI A. (vedi LOVERA G.) | " 986 |
| RZEWUSKI J. - Relativistic Quantum Dynamics of a System of Inter- acting Particles (L.) | " 90 |
| RZEWUSKI J. - On Differential Conservation Laws in Non-Local Field Theories (L.) | " 182 |
| RZEWUSKI J. - Differential Conservation Laws in Non-Local Field Theories | " 784 |
| SALVETTI C. (vedi GALLONE S.) | " 145 |
| SALVINI G. Interaction Mean Free Path and Charge Exchange of the π -Mesons | " 1018 |
| SANDS M. and B. F. TOUSCHEK Alignment Errors in the Strong-Focusing Synchrotron | " 604 |
| SCARSI L. (vedi BARONI G.) | " 1653 |
| SCARSI L. (vedi DILWORTH C. C.) | " 1261 |
| SCARSI L. (vedi PANETTI M.) | " 687 |
| SCHÖNBERG M. - A Generalization of the Quantum Mechanics (L.) | " 350 |
| SCHÖNBERG M. - Application of second quantization methods to classical statistical mechanics (II) | " 419 |
| SCHÖNBERG M. - A General Theory of the Second Quantization Methods | " 697 |
| SCHÖNBERG M. (vedi GOLDSACK S. J.) | " 1480 |
| SCHÖNBERG M. - A Statistical Generalization of the Quantum Mechanics (I) | " 1499 |
| SCHÖNBERG M. - Generalization of the Classical Field Formalism by Means of Functionals (L.) | " 1597 |
| SCIUTI S. (vedi CASTAGNOLI C.) | " 893 |
| SECHI B. (vedi BALDO M.) | " 1482 |
| SING L. - A note on the Raman Spectrum of Thianthrene in Solution (L.) | " 89 |
| SOMMACAL B. (vedi BERETTA E.) | " 1354 |
| SONA P. G. (vedi MANDÒ M.) | " 1275 |
| SRINAVASAN D. (vedi PARTHASARATHY S.) | " 264 |
| STÄHELIN P. und P. PREISWERK - Die Lage der ersten Anregungsstufe in Kernen mit gerader Protonen- und gerader Neutronenzahl | " 1219 |
| STEPHENSON G. - Affine Structure of Gravitation and Electromagnetism (L.) | " 354 |
| STEPHENSON G. - Dirac's Electrodynamics and Einstein's Unified Field Theory (L.) | " 1595 |
| STEPHENSON G. and C. W. KILMISTER - A Unified Field Theory of Gra- vitation and Electromagnetism | " 230 |
| STOLL P. und M. WÄCHTER - Die Energieabhängigkeit des Wirkungs- querschnittes der Reaktion $\text{Li}^7(\gamma, \alpha)\text{H}^3$ (L.) | " 347 |
| STOPPINI G. (vedi AMALDI E.) | " 803 |
| STROFFOLINI R. - Sul contributo alla componente elettronica della radia- zione cosmica nell'atmosfera derivante dal decadimento delle parti- celle μ | " 300 |
| SUCCI C. (vedi LOVATI A.) | " 105 |
| SUCCI C. (vedi LOVATI A.) | " 1201 |
| TAFFARA L. (vedi BUDINI P.) | " 1489 |
| TAGLIAFERRI G. (vedi LOVATI A.) | " 105 |
| TAGLIAFERRI G. (vedi GUERCI G.) | " 971 |
| TAGLIAFERRI G. (vedi LOVATI A.) | " 1201 |

| | |
|---|-----------|
| TARTAGLIONE E. (vedi CENNAMO F.) | pag. 1012 |
| TAUBER G. E. and TA-YOU WU - The J values of States in Configurations (j) ⁿ (L.) | 677, 1357 |
| TA-YOU WU (vedi TAUBER G. E.) | 677, 1357 |
| TERRA L. (vedi GUERCI G.) | » 971 |
| TOMASINI G. (vedi BONETTI A.) | » 345 |
| TOMASINI G. (vedi LEVI SETTI R.) | » 356 |
| TOMASINI G. (vedi BONETTI A.) | » 1736 |
| TOUSCHEK B. F. (vedi MORPURGO G.) | » 1681 |
| TOUSCHEK B. F. (vedi SANDS M.) | » 604 |
| TURRIN A. (vedi CAIANIELLO E. R.) | » 594 |
| VAN ALLEN J. A. - The Cosmic Ray Intensity Above the Atmosphere Near the Geomagnetic Pole | » 630 |
| VANDERHAEGHE G. (vedi BARONI G.) | » 1653 |
| VANDERHAEGHE G. (vedi GOLDSACK S. J.) | » 1480 |
| VERDE M. (vedi REGGE T.) | » 997 |
| VERONESI P. (vedi BRINI D.) | » 1662 |
| VIGONE M. (vedi BERTOLINO G.) | » 991 |
| VILLI C. (vedi FERRARI F.) | » 94 |
| VILLI C. (vedi POIANI G.) | » 179 |
| VILLI C. (vedi BUDINI P.) | » 1172 |
| VITALE B. (vedi BELLIBONI G.) | » 72 |
| VITALE B. (vedi GRILLI B.) | » 1047 |
| VOLPI G. G. (vedi BOATO G.) | » 993 |
| WÄCHTER M. (vedi STOLL P.) | » 347 |
| WATAGHIN G. (vedi GAMBA A.) | » 174 |
| WATAGHIN G. - On the Non-Local Interaction and on the Statistical Interpretation of the Cut-off Operators (L.) | » 500 |
| WATAGHIN G. - On a Non-Local Field Theory (L.) | » 1602 |
| WILLIAMSON E. M. - Energy in the Nuclear Field | » 113 |
| WOLFENDALE A. W. - On the Possible Existence of Associated Knock-on Electrons (L.) | » 1493 |
| ZAGO G. (vedi CRESTI M.) | » 779 |
| ZAGO G. (vedi CRESTI M.) | » 843 |
| ZAPPA L. (vedi GERMAGNOLI E.) | » 1388 |
| ZAPPA L. (vedi BERTOLINI G.) | » 1424 |
| ZIMMER E. L. (vedi BRACCI A.) | » 103 |
| ZORN G. T. (vedi CECCARELLI M.) | » 540 |
| ZORN G. T. (vedi CECCARELLI M.) | » 681 |

INDICE ANALITICO PER MATERIA

ACUSTICA (ULTRASUONI)

| | |
|--|-----------|
| Absorption Coefficient of Ultrasonics in some Liquids determined by the New Thermal Technique (L), S. Parthasarathy and P. P. Mahendroo . | pag. 1196 |
| Absorption of Ultrasonic Waves in Liquids at 5 MHz from Thermal Considerations, S. Parthasarathy, D. Srinivasan and S. S. Chari. . | » 264 |

| | |
|--|----------|
| Dispersion of Ultrasonic Velocity in some Organic Liquids, <i>S. Parthasarathy, A. F. Chhappgar and Harkrishan Singh</i> | pag. 260 |
| Interferometria ultrasonora nei gas (IV). Assorbimento di ultrasuoni nell'ammoniaca, <i>S. Petralia</i> | » 817 |
| Ultrasonic Grating Remaining after Stopping the Ultrasonic Waves (II) (L), <i>A. Carrelli and F. Porreca</i> | » 98 |
| Ultrasonic Grating Remaining after the Stopping of the Ultrasonic Waves (III), <i>A. Carrelli and F. Porreca</i> | » 883 |
| Ultrasonic Grating Remaining after the Stopping of the Ultrasonic Waves (IV), <i>A. Carrelli and F. Porreca</i> | » 1406 |

APPARATI E STRUMENTI

| | |
|---|--------|
| Apparecchiatura per lo studio di fenomeni elettrodici nelle celle elettrolitiche (N. T.), <i>G. Guerci, G. Tagliaferri e L. Terra</i> | » 971 |
| Camera di Wilson in campo magnetico (N. T.), <i>M. Cresti, A. Loria e G. Zago</i> | » 843 |
| Current Fluctuations in Corona Counters, <i>E. Gatti and A. Persano</i> | » 686 |
| Discriminator (single channel elementary amplitude) (L.), <i>E. Gatti and F. Piva</i> | » 984 |
| Fattore di utilizzazione termica e tratto di diffusione termico in una pila eterogenea (L.), <i>S. Gallone</i> | » 1495 |
| Filtri interferenziali in fotometria e in colorimetria, <i>M. Artom, C. M. Garelli e C. Gentile</i> | » 827 |
| Generatore impulsabile di neutroni (N. T.), <i>E. Gatti, G. Perona e A. Persano</i> | » 80 |
| Odoscopio meccanico (N. T.), <i>C. Milone</i> | » 340 |
| Spark Counters (L.), <i>F. Bella, C. Franzinetti and D. W. Lee</i> | » 1338 |
| Spark Counters (N. T.), <i>F. Bella and C. Franzinetti</i> | » 1461 |
| Spark Counters Theory, <i>F. Bella and C. Franzinetti</i> | » 1335 |
| Spettrometro β e γ a contatore proporzionale, <i>G. Bertolini, A. Bisi e L. Zappa</i> | » 1424 |
| Stimolatore elettronico comandato dai potenziali biologici (N. T.), <i>P. L. Bonferroni e M. Conversi</i> | » 835 |
| Strong-Focusing Accelerator (Non-Linearities), <i>E. R. Caianiello</i> | » 581 |
| Strong-Focusing Accelerator (Stability and Periodicity), <i>E. R. Caianiello and A. Turrin</i> | » 594 |
| Strong-Focusing Synchrotron Alignment Errors, <i>M. Sands and B. Touschek</i> | » 604 |
| Viscosimeter (Oscillating Cylinder) <i>A. A. K. Ibrahim and A. M. Kabi</i> | » 87 |

COSMICA (RADIAZIONE)

| | |
|--|--------|
| Altitude and Geomagnetic Effects of Positive and Negative Penetrating Particles of Cosmic Radiation, <i>I. F. Quercia and B. Rispoli</i> | » 1142 |
| Associated Penetrating Particles Underground, <i>C. Castagnoli, A. Gigli and S. Sciuti</i> | » 893 |
| Assorbimento dei muoni sottoterra (concetto di percorso), <i>M. Mandò e P. G. Sona</i> | » 1275 |
| Chree Analysis of Pressure-Temperature-Corrected Cosmic-Ray Burst Frequencies, <i>J. W. Broxon</i> | » 1434 |

| | |
|--|----------|
| Componente elettronica della radiazione cosmica nell'atmosfera derivante dal decadimento dei neutroni, <i>D. Cadorin</i> | pag. 364 |
| Componente elettronica della radiazione cosmica nell'atmosfera (contributo derivante dal decadimento delle particelle μ), <i>R. Stroffolini</i> | » 300 |
| Coppia di stelle vicine correlate (L.), <i>G. Lovera, L. Barbanti Silva, C. Bonacini, C. De Pietri, R. Perilli Fedeli e A. Roveri</i> | » 986 |
| Cosmic Ray electronic showers under dense materials (cloud chamber study of), <i>S. Franchetti</i> | » 551 |
| Cosmic Ray Intensity above the Atmosphere near the Geomagnetic Pole, <i>J. A. Van Allen</i> | » 630 |
| Distribuzioni angolari dei rami neri e grigi in stelle di media ed alta energia, <i>G. Belliboni e B. Vitale</i> | » 72 |
| Distribuzione zenitale delle particelle degli sciami estesi, <i>M. Cresti, A. Loria e G. Zago</i> | » 779 |
| Elettroni e fotoni negli sciami estesi dei raggi cosmici, <i>C. Milone</i> | » 1126 |
| Electron pairs produced in nuclear emulsions by cosmic ray photons, <i>G. Baroni, A. Borsellino, L. Scarsi and G. Vanderhaege</i> | » 1653 |
| Growth of a cosmic ray initiated jet in a nucleus, <i>F. C. Roesler and C. B. A. McCusker</i> | » 127 |
| Interaction of cosmic rays underground (L.), <i>A. Lovati, A. Mura, C. Succi and G. Tagliaferri</i> | » 1201 |
| Jets (investigation on), <i>C. Castagnoli, G. Cortini, C. Franzinetti, A. Manfredini and D. Moreno</i> | » 1539 |
| Jets initiated by high energy cosmic rays, <i>C. C. Dilworth, S. J. Goldsack, T. F. Hoang and L. Scarsi</i> | » 1261 |
| Jets di mesoni nelle emulsioni nucleari (L.), <i>G. Bertolino, A. Debenedetti, G. Lovera e M. Vigone</i> | » 991 |
| Knock-on Electrons (possible existence of associated), <i>A. W. Wolfendale</i> | » 1493 |
| Longitudinal Development of extensive air showers, <i>H. Messel and R. B. Potts</i> | » 754 |
| Longitudinal development of air showers according to Fermi's theory of meson production, <i>E. Amaldi, L. Mezzetti and G. Stoppini</i> | » 803 |
| Penetrazione degli elettroni (L.), <i>E. Clementel</i> | » 683 |
| Positive excess of mesons of high energy (L.), <i>E. Beretta, L. Filosofo and B. Sommacal</i> | » 1354 |
| Production of penetrating secondaries by μ mesons underground (L.), <i>A. Lovati, A. Mura, C. Succi and G. Tagliaferri</i> | » 105 |
| Produzione di neutroni di bassa energia da parte della radiazione cosmica, <i>M. Galli</i> | » 1187 |
| Rapporto tra i numeri di neutroni e di protoni e alcune proprietà della componente nucleonica a 3500 s.l.d.m., <i>M. Conversi, G. Martelli e P. Rothwell</i> | » 898 |
| Sciami di almeno due elettroni prodotti in piombo da raggi cosmici (L.), <i>C. Milone</i> | » 1744 |
| Slow Heavy Mesons from Cosmic Ray Stars, <i>R. Levi Setti and G. Tomasini</i> | » 356 |
| Sparpagliamento laterale degli sciami alle alte energie, <i>G. Poiani e C. Villi</i> | » 179 |
| Spectra and sign Distribution of Particles from cosmic Ray Stars at 2860 metres Altitude, <i>C. C. Dilworth and S. J. Goldsack</i> | » 926 |
| Tracce elettrofotoniche (calcolo delle), <i>R. Cester e E. Clementel</i> | » 1441 |

| | |
|--|-----------|
| Tracce di rinculo nelle stelle di disintegrazione nucleare prodotte dalla radiazione cosmica, <i>M. Grilli e B. Vitale</i> | pag. 1047 |
| Zenithal Dependence of the Penetrating Component of Cosmic Radiation, <i>I. F. Quercia and B. Rispoli</i> | " 357 |

CRISTALLI E SOLIDI

| | |
|--|--------|
| Autofrequenze di un solido - Dipendenza dalla temperatura e dal volume secondo la meccanica statistica, <i>P. G. Bordoni</i> | " 268 |
| Guidage par suspension sur lames élastiques (N. T.), <i>J. E. C. Plainevaux</i> | " 1451 |
| High-order Matter Tensors in Symmetrical Systems, <i>R. Fieschi and F. G. Fumi</i> | " 865 |
| Independent Components of Tensors in Symmetrical Systems (L.), <i>A. Gamba</i> | " 1343 |
| Velocità delle onde elastiche nei solidi a temperatura elevata, <i>P. G. Bordoni e M. Nuovo</i> | " 386 |
| Vibrazione della superficie di una lamina di quarzo piezoelettrico, <i>E. Grossetti</i> | " 151 |

EFFETTO ČERENKOV

| | |
|---|--------|
| Effetto Čerenkov in sostanze aeriformi (L.), <i>A. Ascoli-Balzanelli e R. Ascoli</i> | 1345 |
| Energy Lost by a Relativistic Ionizing Particle in a Material Medium and Čerenkov Radiation, <i>P. Budini</i> | " 236 |
| Ionizzazione e radiazione di Čerenkov (L.), <i>P. Budini e L. Tajara</i> | " 1489 |

FISICA TERRESTRE

| | |
|---|--------|
| Age of the Earth from the Isotopic Composition of Meteoritic Lead, <i>F. G. Houtermans</i> | " 1623 |
| Autoradiografia dell'aerosol atmosferico (L.), <i>E. Moraschinelli</i> | " 1341 |
| Intensità totale del campo magnetico terrestre nella regione inferiore dell'alta atmosfera (strato E), <i>M. Cutolo</i> | " 915 |

MAGNETISMO

| | |
|---|--------|
| Birifrangenza magnetica di sostanze paramagnetiche nelle condizioni di risonanza (L.), <i>A. Battaglia, A. Gozzini e E. Polacco</i> | " 1205 |
| Nuclear Signals Dependence on the Radiofrequency Field and Paramagnetic Catalyst, <i>G. Chiarotti and L. Giulotto</i> | " 54 |
| Risonanza paramagnetica del solfato doppio di manganese e ammonio, <i>P. Brovetto, G. Cini e S. Ferroni</i> | " 1325 |

MESONI (MESONI PESANTI)

| | |
|--|--------|
| Capture of μ -Mesons by atomic Nuclei, <i>E. Eguchi and M. Ohta</i> | " 1415 |
| Decay at rest of a heavy particle (L.), <i>A. Bonetti, R. Levi Setti, M. Pannetti and G. Tomasini</i> | " 345 |
| Diffusione dei mesoni su nucleoni (teoria semiclassica della), <i>E. Fabri</i> | " 1367 |
| Disintegration of the neutral μ -Meson (possible example of a new mode of), <i>S. J. Goldsack, M. Schönberg and G. Vanderhaege</i> | " 1480 |

| | |
|---|-----------|
| Disintegrazione in movimento di una particella pesante, <i>M. Ceccarelli e M. Merlin</i> | pag. 1207 |
| Eccitazione dei nuclei per assorbimento dei mesoni π^- (II), <i>V. De Sabbata, E. Manaresi e G. Puppi</i> | » 1704 |
| Electrons associated with negative μ -mesons, <i>W. F. Fry</i> | » 490 |
| Interaction mean free path and charge exchange of the π -mesons, <i>G. Salvini</i> | » 1018 |
| Interaction of π^+ mesons in photographic plates (I), <i>A. Minguzzi, G. Puppi and A. Ranzi</i> | » 1753 |
| Interazione con i nuclei e produzione di mesoni π , <i>E. Clementel e G. Puppi</i> | » 197 |
| Mesone K uscente da stella (L.), <i>M. Baldo e B. Sechi</i> | » 1482 |
| τ -meson decay (L.), <i>M. Panetti and L. Scarsi</i> | » 687 |
| τ -meson investigation (Contribution to), <i>E. Amaldi, G. Baroni, C. Castagnoli, G. Cortini and A. Manfredini</i> | » 937 |
| Mesone τ uscente da stella (L.), <i>M. Ceccarelli, N. Dallaporta, M. Merlin, G. Quarenì e G. T. Zorn</i> | » 681 |
| Nuclear capture of negative μ -mesons in photographic emulsions, <i>H. Morinaga and W. F. Fry</i> | » 308 |
| Produzione di mesoni in materiali condensati diversi, <i>A. Bonetti, N. Dallaporta, M. Merlin e G. Dascola</i> | » 215 |
| Scattering of μ -mesons by nuclei, <i>R. Gatto</i> | » 1559 |
| Unstable charged particles of hyperprotonic mass, <i>A. Bonetti, R. Levi Setti, M. Panetti and G. Tomasini</i> | » 1736 |
| V_1^0 events in emulsions (preliminary research on), <i>E. Amaldi, C. Castagnoli, G. Cortini and A. Manfredini</i> | » 1351 |

MOLECOLE

| | |
|--|-------|
| Drift velocity of Electrons in BF_3 (L.), <i>A. Bracci and E. L. Zimmer</i> | » 103 |
| Fluorescent emissions of resonance lines at higher pressures, <i>A. Jabłoński</i> | » 573 |
| Raman Spectrum of Thiantrene in solution (L.), <i>L. Sing</i> | » 89 |
| Raman (spettro di bassa frequenza della aragonite), <i>G. Olivelli</i> | » 343 |

NUCLEI (FISICA NUCLEARE - LASTRE)

| | |
|---|--------|
| Adiabatic Nuclear Potential for large values of the coupling constant, <i>M. Cini and S. Fubini</i> | » 1695 |
| Anelasticità degli urti nucleone-nucleone a grande energia, <i>P. Budini e G. Poiani</i> | » 1288 |
| Angular correlation of the products of nuclear disintegration, <i>M. Ceccarelli and G. T. Zorn</i> | » 540 |
| Anregungsstufe (erste) in Kernen mit gerader Protonen- und gerader Neutronenzahl, <i>P. Stähelin und P. Preiswerk</i> | » 1219 |
| Capture of μ -mesons by atomic nuclei, <i>E. Eguchi and M. Otha</i> | » 1415 |
| D-D, neutrons scattering and polarisation effect in ^{12}C , <i>R. Ricamo</i> | » 1607 |
| Dinamica Nucleare (L.), <i>A. Kind</i> | » 176 |
| Eccitazione dei nuclei per assorbimento dei mesoni π^- (II), <i>V. De Sabbata, E. Manaresi e G. Puppi</i> | » 1704 |
| Emulsioni fotografiche (curve di sensibilità ai raggi γ di), <i>L. Argiero</i> | » 1035 |

| | |
|--|-----------|
| Emulsioni nucleari (azione dei vari metodi di sviluppo nella formazione del fondo delle), <i>G. Alvia</i> | pag. 1616 |
| Emulsions nucléaires (action de la basse température sur les), <i>M. De-beauvais-Wack</i> | » 1590 |
| Emulsions (grain density and process of track formation in nuclear) (I), <i>M. Della Corte, M. Ramat and L. Ronchi jr.</i> | » 509 |
| Emulsions (grain density and process of track formation in nuclear) (II), <i>M. Della Corte, M. Ramat and L. Ronchi jr.</i> | » 958 |
| Energy in the nuclear field, <i>E. M. Williamson</i> | » 113 |
| Energia di legame dell' $^7\text{He}^5$ e del $^7\text{Li}^6$, <i>G. Morpurgo</i> | » 473 |
| Energieabhängigkeit des Wirkungsquerschnittes der Reaktion $\text{Li}^7(\gamma, \alpha)\text{H}^3$ (L.), <i>P. Stoll und M. Wächter</i> | » 347 |
| Eventi anelastici da protoni di alta energia in emulsioni nucleari (L.), <i>M. Ladu</i> | » 855 |
| Excitation Energy of a heavy Nucleus described by a Real Fermi Gas (L.), <i>F. Ferrari and C. Villi</i> | » 94 |
| Forze tensoriali e momenti di quadrupolo dei nuclei pesanti, <i>R. Gatto</i> | » 1311 |
| γ Rays from deuterium (neutron capture), <i>A. Bracci, U. Facchini, E. Gatti, E. Germagnoli, A. Malvicini and G. Perona</i> | » 949 |
| Ground state of Cl^{34} (L.), <i>D. C. Peaslee</i> | » 1349 |
| Interpretation of Star Data (L.), <i>H. Messel and R. B. Potts</i> | » 496 |
| J values of states in configurations $(j)^n$ (L.), <i>G. E. Tauber and Ta-You-Wu</i> | 677, 1357 |
| Liquid drop Behaviour of an Independent particle Nuclear model, <i>S. Gallone and C. Salvetti</i> | » 145 |
| Modello a particelle indipendenti ed eccitazione del nucleo pesante, <i>A. Kind e G. Patergnani</i> | » 1375 |
| Non-adiabatic Equation for nucleon-pion scattering, <i>S. Fubini</i> | » 851 |
| Non-adiabatic Treatment of nucleon-pion scattering, <i>S. Fubini</i> | » 564 |
| Perturbating factor on the Kinetics of the Homogeneous deuterium exchange Reaction (L.), <i>G. Boato, G. Careri, A. Cimino, E. Molinari and G. Volpi</i> | » 993 |
| Scattering di particelle cariche da parte dei nuclei, <i>E. Clementel e A. Coen</i> | » 988 |
| Selection Rule for the Reaction $^6\text{Li}(\gamma d)^4\text{He}$, <i>A. Gamba and G. Wataghin</i> | » 174 |
| Sezione d'urto totale di alcuni elementi per neutroni di 14 MeV, <i>M. Ageno, G. Cortellessa e R. Querzoli</i> | » 281 |
| Stelle da protoni di alta energia in emulsioni nucleari (L.), <i>M. Ladu</i> | » 111 |

ONDE ELETTROMAGNETICHE

| | |
|---|-------|
| Resonance Curves in the Gyro-Interaction of Electromagnetic Waves in the Ionosphere, <i>F. H. Hibberd</i> | » 380 |
|---|-------|

RADIOATTIVITÀ

| | |
|---|--------|
| Cascades in the γ -Ray Spectrum of ^{214}Po , <i>F. Demichelis and R. Malvano</i> | » 405 |
| Cascade γ - γ del ^{214}Po (correlazione angolare nelle), <i>F. Demichelis e R. Malvano</i> | » 1359 |
| γ -rays emitted from ^{60}Co , ^{56}Mn , ^{187}W , ^{128}I , ^{104}Rh , <i>E. Germagnoli, A. Malvicini and L. Zappa</i> | » 1388 |
| Radioactivité α spécifique des plaques Ilford pur recherches nucléaires (L.), <i>S. Deutsch et E. C. Dodd</i> | » 858 |

RAGGI X

| | |
|---|----------|
| Diffrazione dei raggi X nei liquidi, <i>F. Cennamo</i> | pag. 395 |
| Diffrazione dei raggi X in soluzioni acquose di formaldeide, <i>F. Cennamo</i> e <i>E. Tartaglione</i> | » 1012 |

SCARICHE NEI GAS

| | |
|--|--------|
| Decay of the space charges in intermittent discharges in Neon and Argon, <i>D. Brini</i> and <i>P. Veronesi</i> | » 1662 |
|--|--------|

TEORIE GENERALI

| | |
|--|--------|
| Adiabatic nuclear potential for large values of the coupling constant, <i>M. Cini</i> and <i>S. Fubini</i> | » 1695 |
| Affine field structure of gravitation and electromagnetism (L.), <i>G.</i> <i>Stephenson</i> | » 354 |
| Campi interagenti (un semplice modello di), <i>A. Loinger</i> | » 356 |
| Diagonalizzazione della hamiltoniana nella teoria dei campi (II), <i>B.</i> <i>Ferretti</i> | » 1079 |
| Differential conservation laws in non-local field theories (L.), <i>J. Rzewuski</i> | » 182 |
| Differential conservation laws in non-local field theories, <i>J. Rzewuski</i> | » 784 |
| Dirac's electrodynamics and Einstein's unified field theory (L.), <i>G.</i> <i>Stephenson</i> | » 1595 |
| Equazione del moto dell'elettrone nell'elettrodinamica classica (L.), <i>P. Caldirola</i> | » 1747 |
| Form factors in non-local theories, <i>M. Chrétien</i> and <i>R. E. Peierls</i> | » 668 |
| Generalization of the classical field formalism by means of functionals (L.), <i>M. Schönberg</i> | » 1597 |
| Hamiltonian Structure of non-local field theories, <i>W. Pauli</i> | » 648 |
| Interazioni non localizzabili - Confronto fra varie formulazioni, <i>A. Ascoli</i> | » 745 |
| Isotopic spin for light particles, <i>M. Cini</i> and <i>A. Gamba</i> | » 1040 |
| Long range nuclear forces (L.), <i>H. C. Corben</i> | » 1485 |
| Mass quantization and isotopic spin in non-local field theory, <i>J. Rayski</i> | » 1729 |
| Nichtlineare pseudoskalare Mesonentheorie (L.), <i>F. Cap</i> | » 1347 |
| Non adiabatic equation for nucleon-pion scattering, <i>S. Fubini</i> | » 851 |
| Non adiabatic method for the relativistic two body Problem (covariant formulation) (I), <i>M. Cini</i> | » 526 |
| Non adiabatic method for the relativistic two body Problem (covariant formulation) (II), <i>M. Cini</i> | » 614 |
| Non adiabatic treatment of nucleon-pion scattering, <i>S. Fubini</i> | » 564 |
| Non local field theory (L.), <i>G. Wataghin</i> | » 1602 |
| Non local field theories, (On a theorem in) <i>P. Gulmanelli</i> | » 1582 |
| Non local interaction and statistical interpretation of the Cut-off ope- rators (L.), <i>G. Wataghin</i> | » 500 |
| Processi del second'ordine dell'interazione alla Fermi, <i>P. Budini</i> | » 1299 |
| Processi del quart'ordine dell'interazione alla Fermi, <i>P. Budini</i> | » 1486 |
| Quantum field theory - (I): Explicit solution of Dyson's equation in the Electrodynamics without use of Feynman Graphs, <i>E. R. Caianiello</i> | » 1634 |
| Quantum mechanics (L.), (A generalization of) <i>M. Schönberg</i> | » 350 |
| Quantum mechanics (I), (A statistical generalization of) <i>M. Schönberg</i> | » 1499 |

| | |
|---|-----------|
| Regular field theory, <i>J. Rayski</i> | pag. 1 |
| Relativistic quantum dynamics of a system of Interacting particles, <i>J. Rzewuski</i> | » 90 |
| Renormalized two particle potential from field theory, <i>W. Macke</i> . . . | » 1198 |
| Scattering problems with spin orbit couplings, <i>T. Regge</i> and <i>M. Verde</i> . . | » 997 |
| Scattering theory of relativistic equations, <i>E. Corinaldesi</i> | » 1673 |
| Second quantization methods applied to the classical statistical mecha- nics (II), <i>M. Schönberg</i> | » 419 |
| Second quantization methods, (A general theory of) <i>M. Schönberg</i> . . | » 697 |
| Selection rules imposed by charge conjugation, <i>M. Michel</i> | » 319 |
| Separabilità delle variabili, <i>A. Carrelli</i> | » 1213 |
| Spinor relativity, <i>R. L. Ingraham</i> | » 27 |
| Tamm-Dancoff method (Remarks on the validity of the), <i>G. Morpurgo</i> and <i>B. F. Touschek</i> | » 1681 |
| Teorema di ortogonalità alla Van Hove (Esempio elettrodinamico) (L.), <i>A. Loinger</i> | » 498 |
| Teoria delle distribuzioni (II), <i>S. Albertoni</i> e <i>M. Cugiani</i> | 157, 1605 |
| Teoria non locale dell'interazione tra particelle di Fermi, <i>P. Budini</i> e <i>C. Villi</i> | » 1172 |
| Unified field theory of gravitation and Electromagnetism, <i>G. Stephenson</i> and <i>C. W. Kilminster</i> | » 230 |
| Universal Fermi type interaction, <i>E. R. Caianiello</i> | » 43 |

INDICE DELLE RECENSIONI

| | |
|---|----------|
| A. GATTERER - <i>Grating Spectrum of iron</i> | pag. 111 |
| H. BRUCKNER - <i>Gastafeln</i> | » 112 |
| G. KORTUM und H. BUCHHOLZ - HEISENHEIMER - <i>Die Theorie der Destillation</i> und <i>Extraktion von Flüssigkeiten</i> | » 193 |
| B. FINZI e B. UDESCHINI - <i>Esercizi di Meccanica razionale</i> | » 194 |
| <i>Annual Review of Nuclear Science</i> | » 195 |
| M. VILLA - <i>Repertorio di Matematiche</i> | » 504 |
| A. DAUVILLIER - <i>La physique cosmique</i> | » 506 |
| H. GARTMANN - <i>Raumfahrt-Forschung</i> | » 506 |
| K. E. ZIMEN - <i>Angewandte Radioaktivität</i> | » 506 |
| R. ROHTE - <i>Höhere Mathematik</i> | » 507 |
| LEONARDO DA VINCI - <i>I Libri del volo</i> (Ricostruzione critica di A. Uccelli con la collaborazione di C. Zammattio). | » 691 |
| S. FLUGGE und H. MARSCHALL - <i>Rechenmethoden der Quantentheorie</i> . . . | » 692 |
| GRIMSEHL - <i>Lehrbuch der Physik</i> , III. Band | » 693 |
| E. T. JAYNES - <i>Ferroelectricity</i> | » 694 |
| <i>An International Bibliography on Atomic Energy</i> | » 695 |
| A. L. REIMANN - <i>Vacuum Technique</i> | » 862 |
| G. GIORGI, G. MADIA - <i>Elettrotecnica Generale per Istituti Industriali</i> . . | » 863 |
| <i>Progress in Nuclear Physics</i> , vol. II | » 995 |
| <i>Annual Review of Nuclear Science</i> | » 995 |

| | |
|--|----------|
| CENTRO OTTICO ITALIANO, Firenze - <i>Recenti progressi negli obiettivi fotografici - Normalizzazione nel campo dell'Ottica</i> | pag. 996 |
| H. KOLSKY - <i>Stress Waves in Solids</i> | » 1210 |
| O. GRAF - <i>Die wichtigsten Baustoffe des Hoch- u. Tiefbaus</i> | » 1605 |
| K. MAYRHOFER - <i>Inhalt und Maß</i> | » 1756 |
| J. B. BIRKS - <i>Scintillation Counters</i> | » 1757 |
| O. KLEMPERER - <i>Electron Optics</i> | » 1757 |
| P. O. RICE e E. TELLER - <i>La struttura della materia</i> | » 1759 |
| W. GLASER - <i>Grundlagen der Elektronenoptik</i> | » 1760 |

Fine del Volume X, Serie IX, 1953

PROPRIETÀ LETTERARIA RISERVATA

Direttore responsabile: G. POLVANI

Tipografia Compositori - Bologna

Questo fascicolo è stato licenziato dai torchi il 28-XI-1953